LE CHOIX D'UNE AUTRE SCOLARITÉ

Mathématiques

Cours de vacances

Entrée en troisième

76/78 rue Saint Lazare – 75009 Paris
eib-adistance.com

Séquence 1

Chapitre 1 : Calculs numériques
Chapitre 2 : Géométrie dans le triangle

Devoir n° 1

Séquence 2

Chapitre 3 : Calculs algébriques

Devoir n° 2

Séquence 3

Chapitre 4 : La proportionnalité

Devoir n° 3

Séquence 4

Chapitre 5 : Géométrie dans l'espace

Devoir n° 4

Corrigés des exercices d’entraînement en fin de fascicule

Introduction

Ce programme de révision du cours de mathématiques de la classe de quatrième couvre les points qu'il faut **absolument connaître et maîtriser** pour pouvoir espérer commencer le programme de la classe de troisième.
Mais « indispensable » ne veut pas dire « suffisant ».

Les exercices d'entraînement sont souvent très répétitifs. Il faut les traiter tous avant d'en vérifier les réponses dans la seconde partie de ce fascicule.
Aucun calcul ne doit être fait au moyen de la calculatrice.

Les devoirs doivent être totalement rédigés : c'est à dire que le correcteur ne doit pas avoir recours à l'énoncé pour comprendre ce qui est proposé.
Il faudra donc y faire apparaître ce qui est utile et nécessaire de l'énoncé.
Les réponses seront toujours expliquées ou démontrées.
Les résultats seront mis en évidence (soulignés ou encadrés).
L'orthographe et la présentation générale sont des points très importants à soigner.

Séquence 1

Calculs numériques

I. Somme de nombres relatifs

La somme de deux nombres est le nombre obtenu en additionnant deux nombres donnés appelés les termes de la somme. Cette somme peut être ou non effectuée.

Exemple

18 + 13 est la somme non effectuée des deux termes 18 et 13.
31 est la même somme, mais effectuée.

Définition : On appelle **nombres opposés** deux nombres dont la somme est égale à 0.

Exemples

+ 3 et − 3 sont opposés car : + 3 − 3 = 0
− 12,687 et + 12,687 sont opposés également.

Généralisation : − a désigne l'opposé du nombre représenté par a.

Règle de la soustraction : Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé.

Exemples

(+ 7) − (+ 5) = (+ 7) + (− 5) = + 2.
(− 34) − (− 16) = (− 34) + (+ 16) = − 18

Généralisation : $a - b = a + (-b)$

En application de cette règle, on peut donc traiter ensemble ces deux opérations (addition et soustraction) en une seule à laquelle nous donnons le nom de somme algébrique.

Opposé d'une somme ; règle des parenthèses.

L'opposé d'une somme est égal à la somme des opposés de chacun des termes.
Ce qui se traduit par les écritures suivantes :

$-(a + b) = -a - b$ et $-(a - b) = -a + b$.

II. La multiplication et la division

Règle des signes

Le produit de deux nombres de même signe est positif.
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

Exemples

$(-5) \times (+6) = -30$; $(-8) \times (-7) = +56$

Généralisation :
Le signe d'un produit dépend du nombre de facteurs négatifs.
S'il est pair, le produit est positif.
S'il est impair, le produit est négatif.

Remarque

Le produit d'un nombre par (– 1) est l'opposé de ce nombre : $(-1) \times (-3) = +3$

Produit de fractions : (simplifications préalables).

Calculs	Méthodes
$A = -\frac{7}{3} \times \left(-\frac{24}{13}\right) \times \frac{39}{35}$	S'occuper d'abord du signe : 2 signes moins : produit positif
$A = \frac{7}{3} \times \frac{3 \times 8}{13} \times \frac{3 \times 13}{7 \times 5}$	Faire apparaître les facteurs présents dans les différents nombres
$A = \frac{7}{7} \times \frac{3}{3} \times \frac{13}{13} \times \frac{8 \times 3}{5}$	En déplaçant les facteurs, faire apparaître des fractions «égaes à l'unité.
$A = \frac{24}{5}$	Donner le résultat sous forme irréductible.

La division

Définition :
Tout nombre non nul admet un inverse.
Deux **nombres** sont **inverses** si leur produit est égal à 1.

Remarques :

1. Un produit ayant un facteur égal à 0 est lui-même nul.
2. Deux nombres inverses sont de même signe.
3. Plus un nombre est grand, plus son inverse est petit (en valeur absolue)
4. 0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.

Lien entre la division et la multiplication :

Si $a \times b = p$, alors $a = \frac{p}{b}$ et $b = \frac{p}{a}$ Si $\frac{a}{b} = q$, alors $a = b \times q$ et $b = \frac{a}{q}$

Règle de la division :

Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Exemples

$$\frac{5}{8} = 5 \times \frac{1}{8} \qquad \frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{7}$$

Généralisation

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

III. Bilan des propriétés des opérations

	Addition	Multiplication
écriture littérale	$a + b = s$	$a \times b = p$
Vocabulaire	a et b sont les **termes** de la **somme** s	a et b sont les **facteurs** du **produit** p.
Commutativité	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Associativité	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
élément « neutre »	$a + \mathbf{0} = a$	$a \times \mathbf{1} = a$

éléments « symétriques »	Deux **opposés** ont une somme nulle. $a + (-a) = 0$	Deux **inverses** ont un produit égal à 1. $a \times \frac{1}{a} = 1$
Opération associée	**Soustraire** un nombre, c'est ajouter son opposé. $a - b = a + (-b)$	**Diviser** par un nombre, c'est multiplier par son inverse $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

IV. Addition des fractions

Méthode

1. Simplifier les fractions
2. Les mettre au même dénominateur
3. Addition des numérateurs
4. Simplifier le résultat lorsque c'est possible

Exemple

Pour calculer $A = \frac{45}{162} + \frac{28}{96}$, commencer par simplifier les fractions :

$\frac{45}{162} = \frac{5 \times 9}{18 \times 9} = \frac{5}{18}$ et $\frac{28}{96} = \frac{7 \times 4}{24 \times 4} = \frac{7}{24}$ d'où $A = \frac{5}{18} + \frac{7}{24}$

Mettre les fractions au même dénominateur : $72 = 18 \times 4 = 24 \times 3$ donc

$\frac{5}{18} = \frac{5 \times 4}{18 \times 4} = \frac{20}{72}$ et $\frac{7}{24} = \frac{7 \times 3}{24 \times 3} = \frac{21}{72}$

Alors $A = \frac{5}{18} + \frac{7}{24} = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$

Recherche du dénominateur commun

Le dénominateur commun est le plus petit multiple commun aux dénominateurs initiaux
Pour le trouver rapidement (par exemple pour 18 et 24) :
On cherche dans les multiples du plus grand le premier qui soit aussi multiple de l'autre.
Les multiples de 24 : 24 n'est pas un multiple de 18
48 n'est pas un multiple de 18

72 est un multiple de 18, donc c'est le nombre cherché.

V. Réduction d'une écriture littérale

Développer, c'est supprimer toutes les parenthèses.
Réduire, c'est écrire l'expression sous la forme comportant le moins de termes.

Exemple

Développer et réduire l'expression : $A = 3 - (a + 5 - b) + 2 - (3 - c)$:

Développer $A = 3 - a - 5 + b + 2 - 3 + c$ (On supprime les parenthèses)

Réduire $A = - a + b + c - 3$ (On effectue les sommes possibles)

Exercices d'entraînement

<u>Exercice 1</u>

Effectuer les calculs ; résultats sous forme de fraction irréductible.

$G = \frac{77}{84} - \frac{176}{165}$ $H = \frac{91}{416} + \frac{35}{336}$ $J = \frac{55}{132} + \frac{35}{90} - \frac{66}{36}$ $K = \frac{56}{48} + \frac{21}{28} - \frac{52}{117}$

$L = \frac{16}{60} - \frac{49}{63} + \frac{104}{65}$ $M = \frac{45}{70} - \frac{20}{16} - \frac{18}{48}$ $N = \frac{115}{25} - 4$

<u>Exercice 2</u>

Développer et réduire les expressions :

$A = a + (b - 5 + a) - (13 - a + b)$ $B = -8 + a - b - (4 - b) + (a + b - 6)$

$C = a + (b - 5 - b) + a - 6 + 8 - a$ $D = -(a + b - 7) - b - (-5 + a - b)$

$E = b - (4 - a - b - 6) + (2 - a + a - b)$ $F = 1 - (a - 9) + (3 + b) - (12 + a + b)$

$G = 10 + (a + b + 11) - (17 - a - b)$ $H = (a + b - 5) - (a - b) + (b + 8)$

<u>Exercice 3</u>

Calculer les expressions :

$A = 7 - 4 \times 8$ $B = 4 \times 12 - 7 \times 9$ $C = 37 - 6 \times 5$ $D = 12 - 9 \div 3$

$E = 32 \div 4 - 2 - 7 \times 3$ $F = 9 \times 4 \div 2 - 5 \times 2$ $G = 23 - 4 \times 5 + 12$ $H = 3 - 5 \times 9 + 7$

$I = (3 - 5) \times (-9) + 7$ $J = 3 - 5 \times (9 + 7)$ $K = 3 - (5 \times 9 + 7)$ $L = 4 - [6 - (1 - 8)]$

<u>Exercice 4</u>

Rajouter des parenthèses pour que chaque égalité soit vraie.

a) $8 + 2 \times 5 = 50$ b) $9 - 3 \times 2 + 5 = 42$

c) $8 + 4 \times 3 \div 2 = 18$ d) $7 + 2 \times 5 = 45$

e) $5 + 7 \times 3 \div 2 = 13$ f) $9 - 2 \times 7 + 2 = 63$

<u>Exercice 5</u>

Calculer les expressions suivantes :

$a = 3 + (-5) + [4 - (-2)]$ $b = [(-20) - (+22)] + [(-20) - (-13)]$

$c = (-7) - [(-8) + 3 - (-3)]$ $d = [5 - (-2)] \times [9 + (-6)]$

$e = [(-8) + (-5)] - [2 - (-5)]$ $f = [(-12) + (+6)] - [(+2) + (-5)]$

<u>Exercice 6</u>

Calculer les expressions suivantes lorsque $a = -2$; $b = 3$; $c = -1$ et $d = 1$

$A = a + b + c + d$ $B = a - b + c - d$ $C = -a + b - c - d$

$D = -(a + b) + (c + d)$ $E = -(a - b) - (c - d)$ $F = (a - b) + (c - d)$

<u>Exercice 7</u>

Calculer les expressions suivantes lorsque $a = -2$ et $b = +3$:

$A = 2b + 3a - 2$ $B = (2b + 3) \times (a - 2)$ $C = 2(b + 3) \times a - 2$

$D = 2a - 3b + 1$ $E = (2a - 3) \times (b + 1)$ $F = 2(a - 3b) + 1$

$G = \frac{2a - 3b}{a + b}$ $H = \frac{b - 2a}{2a - b + 6}$ $I = \frac{(a - 2b)(-1 + a)}{a + b + 1}$

<u>Exercice 8</u>

1) Si $xy = -3{,}8$, que vaut $x \times 5 \times y$?

2) Si $xy = 35$, que vaut $x \times (-0{,}1) \times 2 \times y$?

3) Si $xy = -41$, que vaut $2 \times x \times y \times (-5)$?

4) Si xy = – 29, que vaut $25 \times y \times x \times (-4)$?

Exercice 9

Calculer les expressions suivantes lorsque $a = -8$; $b = 6$ et $c = -2$:

$a + bc$ $\qquad a + \frac{b}{c}$ $\qquad \frac{a}{b + c}$ $\qquad \frac{a + b}{c}$

Exercice 10

Un agriculteur garde les $\frac{2}{7}$ de sa récolte de pommes de terre et met le reste en vente à 1 € le kilo. Il parvient à en vendre les $\frac{8}{9}$, ce qui lui rapporte 1 000 €.

Combien de kilos de pommes de terre a-t-il récolté ?

Exercice 11

Lors d'un match de football France Allemagne, les $\frac{6}{13}$ des spectateurs étaient français et les $\frac{4}{9}$ des spectateurs étaient allemands. 5 830 supporters n'étaient ni français ni allemands. Combien de spectateurs y avait-il dans le stade ?

Exercice 12

D'une cuve pleine de fuel, on sort une première fois le $\frac{1}{6}$ et une deuxième fois le $\frac{1}{5}$ de ce qu'il reste. Il reste finalement 570 litres. Quelle est la capacité de la cuve ?

Exercice 13

Effectuer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

$A = \frac{6}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{2}$ $\qquad B = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2}$ $\qquad C = \left(2 - \frac{1}{3}\right) \div \left(5 + \frac{5}{6}\right)$

$D = \dfrac{\frac{2}{5}}{3 - \frac{7}{10}}$ $\qquad E = \frac{24}{15} \div \frac{36}{25}$ $\qquad F = \frac{72}{162} \div \frac{108}{54}$

$G = \dfrac{\frac{3}{2} - \frac{5}{2} + 1}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}}$ $\qquad H = \left(\frac{2}{8} - \frac{3}{25}\right) \div \frac{3}{10}$ $\qquad I = \dfrac{\frac{5}{4} + \frac{2}{5}}{2 - \frac{7}{5}}$

Exercice 14

Sachant que $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{1}{4}$; $c = \frac{2}{5}$ et $d = -\frac{1}{2}$, calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible : $A = ab + cd$ $\qquad B = \frac{a + b}{b + c}$.

Exercice 15

Soit A, B, C et D les autres expressions en fonction de x et de y :

$A = 2x - 3y$ $B = x + 3y$ $C = 3x + 4y + 1$ $D = 2x - y + 2$

Donner une écriture réduite des expressions suivantes :

$A + B$	$A - C$	$B - C + D$
$A + C + D$	$A - B + C - D$	$C - A + B$

Géométrie dans le triangle

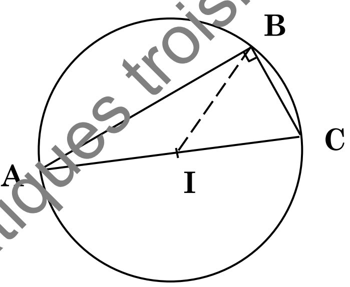
I. Le triangle rectangle

Théorème du cercle circonscrit

Pour tout triangle, il existe un cercle unique passant par les trois sommets; on l'appelle le cercle **circonscrit** au triangle. On dit que le triangle est **inscrit** dans le cercle.
Le centre de ce cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.

> Propriété :
> Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Illustration



Hypothèses:
- ABC est rectangle en B
- I est le milieu de [AC]

Conclusion:
- I est le centre du cercle circonscrit à ABC.

1. Propriété de la médiane

C'est une conséquence immédiate de la propriété précédente

> Propriété :
> Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Illustration

Hypothèses:	Conclusion
ABC est rectangle en B I est le milieu de [AC]	$AI = BI = CI = \frac{1}{2}AC$

2. Le théorème de Pythagore

Les longueurs des côtés du triangle ne sont pas indépendantes; si l'on en connaît deux, la troisième est imposée. La relation entre ces trois longueurs porte le nom de théorème de Pythagore.

> Théorème « direct » :
> Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Illustration

Hypothèse	Conclusion
KLM est rectangle en M	$KL^2 = LM^2 + KM^2$

Deux exemples d'utilisation du théorème direct :

- **Si on connaît les deux côtés de l'angle droit :**

Triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5 et AC = 3. La relation de Pythagore permet d'écrire : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$. Et donc $BC = \sqrt{34} \approx 5{,}8$

- **Si on connaît un côté de l'angle droit et l'hypoténuse.**

Triangle MNP rectangle en N avec MN = 4 et MP = 8. La relation de Pythagore permet d'écrire : $MP^2 = MN^2 + NP^2$, donc $NP^2 = MP^2 - MN^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$, d'où $NP = \sqrt{48} \approx 6{,}9$

3. Propriétés réciproques

Réciproque de la propriété du **cercle circonscrit** :
Si un triangle est inscrit dans un cercle avec un de ses côtés diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle.

Illustration

Hypothèses : A, B et C sont sur le cercle ($\mathcal{C}$); [AC] est un diamètre de ($\mathcal{C}$) .
Conclusion : ABC est rectangle en B.

Réciproque de la propriété de la **médiane** :
Dans un triangle, si la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle; et ce côté est son hypoténuse.

Illustration

Hypothèses:	Conclusion
I est le milieu de [AD] ; $MI = \frac{AD}{2}$	AMD est rectangle en M

Réciproque du théorème de **Pythagore** :
Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côté, alors le triangle est rectangle.

Comment rédiger correctement en utilisant le théorème de Pythagore ou sa réciproque.
1) Le théorème « direct » de Pythagore permet de calculer une des trois longueurs quand on connaît les deux autres **dans un triangle rectangle.**
Il faut donc pouvoir dire dans quel triangle rectangle, et quelles sont les deux longueurs connues. La façon de mener les calculs est montrée dans le paragraphe 3 ci-dessus.
2) Si on connaît les longueurs des trois côtés et que le but est de déterminer si le triangle est ou n’est pas rectangle, il faut faire des calculs pour savoir si la relation de Pythagore est ou n’est pas vérifiée.
On mènera donc deux calculs dont on comparera les résultats avant de pouvoir conclure.
Exemple1 :AB = 5, BC = 12 et AC = 13.
$AC^2 = 13^2 = 169$. $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$; l’égalité étant vérifiée, la **réciproque** du théorème permet de conclure que le triangle ABC est rectangle (il est bon de préciser : en B).
Exemple 2 : AB = 11, BC = 4 et AC = 13.
$AC^2 = 13^2 = 169$. $AB^2 + BC^2 = 11^2 + 4^2 = 121 + 16 = 137$.

$AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ donc d'après le théorème de Pythagore (ou sa contraposée), le triangle ABC n'est pas rectangle.

Bilan :
On peut prouver qu'**un triangle est ou n'est pas rectangle** lorsque :
- On connaît deux des angles.
- On connaît la position du centre du cercle circonscrit.
- On sait que trois longueurs sont égales (la médiane et deux moitiés de côtés).
- On connaît les longueurs des trois côtés.

4. Cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle ABC rectangle en A
Connaître la définition du cosinus d'un angle aigu, c'est connaître les trois relations :

$\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ $\qquad$ $\cos \widehat{C} = \dfrac{AC}{BC}$

$AB = BC \times \cos \widehat{B}$ $\qquad$ $BC = \dfrac{AB}{\cos \widehat{B}}$

$AC = BC \times \cos \widehat{C}$ $\qquad$ $BC = \dfrac{AC}{\cos \widehat{C}}$

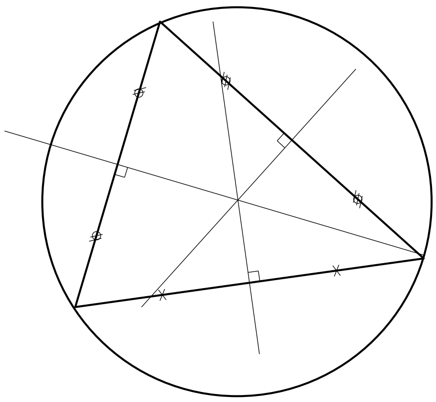
Dans le triangle rectangle, le plus grand côté est l'hypoténuse. Par rapport à un angle aigu de ce triangle, on peut qualifier les deux autres côtés de "côté adjacent" (celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse) et de "côté opposé".
Par exemple, dans **un triangle rectangle ABC rectangle en A,** [AC] est le côté adjacent pour l'angle en C, et opposé pour l'angle en B; et [AB] est le est le côté adjacent pour l'angle en B, et opposé pour C.

Dès lors il est **pratique** de retenir la "formule" suivante : $\mathbf{\cos = \dfrac{adjacent}{hypoténuse}}$

II. Droites particulières des triangles

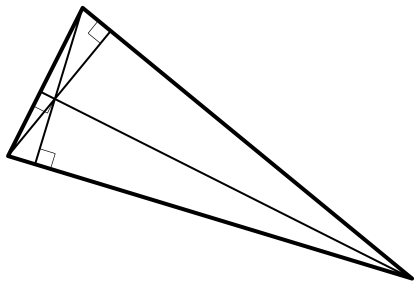
Médiatrices des côtés

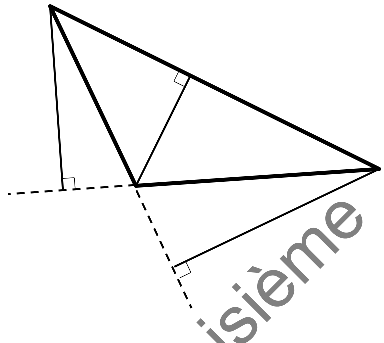
Propriétés des médiatrices du triangle.
Tous les triangles ont un cercle circonscrit. Les trois médiatrices sont concourantes. Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des trois côtés du triangle.



1. Hauteurs relatives aux côtés

Définition :
Une hauteur dans un triangle est le segment joignant un sommet à son projeté orthogonal sur le côté opposé.





Aire du triangle
Dans un triangle <u>quelconque</u>, il y a trois côtés et pour chacun d'eux, une hauteur associée.
Il y a donc trois manières de calculer l'aire :

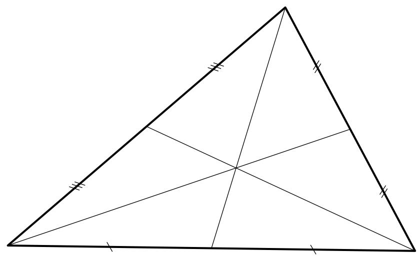
Si c désigne la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur associée : $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{c \times h}}{\mathbf{2}}$

Propriété des hauteurs d'un triangle :
Les trois hauteurs d'un triangle (ou les droites qui les portent) sont concourantes.
Le point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle.

2. Médianes relatives aux côtés

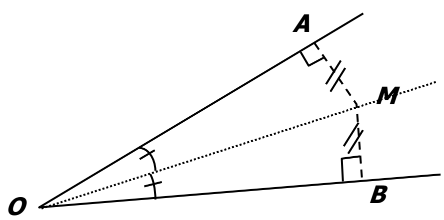
Définition :
Une médiane dans un triangle est le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé.
C'est le segment qui partage un triangle en deux triangles de même aire.

Propriété des médianes d'un triangle :
Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
Le point de concours s'appelle le centre de gravité du triangle.
Il est situé aux deux tiers de la longueur de la médiane à partir du sommet

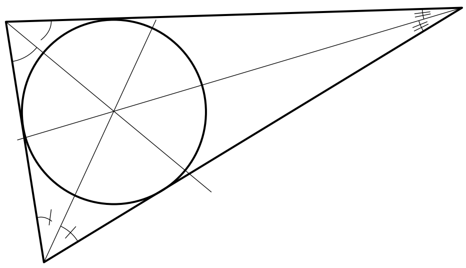


3. Bissectrices des angles

Propriété des points d'une bissectrice :
Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.
Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est situé sur la bissectrice de cet angle



Propriété des bissectrices dans un triangle :
Les trois bissectrices d’un triangle sont concourantes.
Leur point de concours est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



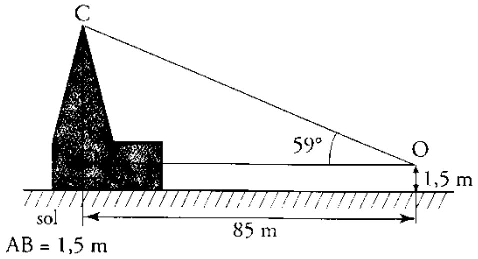
Exercices d'entraînement

Exercice 16

1) Construire un triangle ABC rectangle en A sachant que : AB = 6 cm et $\widehat{ABC}$ = 35°.
2) Calculer la longueur BC et la longueur AC ; on donnera les résultats au millimètre le plus proche.

Exercice 17

On veut mesurer la hauteur d'une cathédrale. Grâce à un instrument de mesure placé en O, à 1,5 m du sol et à 85 m de la cathédrale, on mesure l'angle $\widehat{COB}$ et on trouve 59°.



1) Déterminer la longueur CB au dixième de mètre le plus proche.
2) En déduire la hauteur de la cathédrale que l'on arrondira au mètre le plus proche.

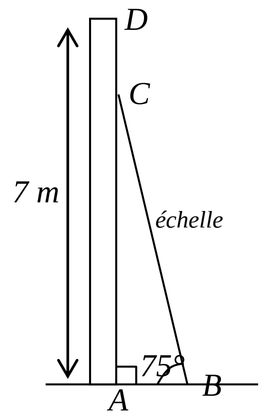
Exercice 18

ABC est un triangle rectangle en A.
On donne AB = 5 cm et $\widehat{ABC}$ = 35°.
1) Construire la figure en vraie grandeur.
2) Déterminer la longueur AC, arrondie au dixième de centimètre.

Exercice 19

Une échelle de 6 mètres est appuyée contre un mur vertical de 7 mètres de haut. Par mesure de sécurité, on estime que l'angle que fait l'échelle avec le sol doit être de 75° (voir schéma ci-contre).

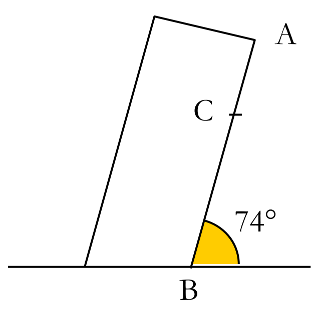
1) Calculer la distance AB entre le pied de l'échelle et le mur. (On donnera le résultat arrondi au centimètre.)
2) À quelle distance CD du sommet du mur se trouve le haut de l'échelle ? (On donnera le résultat arrondi au centimètre.)



Exercice 20

A - La tour de Pise fait un angle de 74° avec le sol horizontal.
Lorsque le soleil est au zénith (rayons verticaux), la longueur de son ombre sur le sol est de 15 m.
On arrondira les différents résultats au mètre près le cas échéant.

1) Calculer à quelle hauteur au-dessus du sol se trouve le point A de la tour.
2) Calculer la distance AB.



B - Un touriste (point C) a gravi les $\frac{2}{3}$ de l'escalier de la tour.

En se penchant, il laisse tomber verticalement son appareil photo.
1) Montrer que le point d'impact (point D) de l'appareil photo sur le sol se situe à 10 m du pied de la tour (point B).
2) De quelle hauteur est tombé l'appareil photo ?

Exercice 21

Un câble de 20 m de long est tendu entre le sommet d'un poteau vertical et le sol horizontal. Il forme un angle de 40° avec le sol.
1) Calculer la hauteur du poteau.
2) Représenter la situation par une figure à l'échelle $\frac{1}{200}$ (les données de la situation doivent être placées sur la figure).

Exercice 22

ABCD désigne un rectangle tel que AB = 7,2 cm et BC = 5,4 cm.
1) Dessiner en grandeur réelle ce rectangle et sa diagonale [AC].
2) Calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{ACD}$.
3) Démontrer que les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux.
4) La médiatrice du segment [AC] coupe la droite (AB) en E. Placer le point E et montrer que le triangle ACE est isocèle.
5) En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{DCE}$.

Exercice 23

Soit un cercle de centre O et de rayon 3 cm. [AB] est un diamètre et C un point du cercle tel que AC = 4,6 cm.
1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2) Déterminer, à l'aide d'un calcul, la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$ (arrondir cette mesure à 1° près).
3) Par la symétrie de centre C, le point A a pour image D et le point B a pour image E. Construire D et E.
4) Démontrer que le quadrilatère ABDE est un losange.

Exercice 24

Les longueurs sont exprimées en cm.
1) Construction :
   - tracer un cercle C de diamètre [AB] avec AB = 6 ;
   - tracer la droite (Δ) perpendiculaire en B à la droite (AB) ;
   - placer un point E du cercle qui vérifie AE = 4 ;
   - la droite (AE) coupe la droite (Δ) en F.
2) Démontrer que le triangle ABE est un triangle rectangle.
3) Calculer cos $\widehat{BAE}$ et en déduire le calcul de AF.

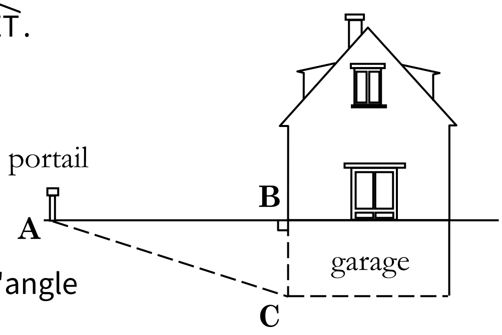
Exercice 25

Un triangle SET est isocèle en E, H est le point de [ET] tel que [SH] soit la hauteur issue de S.

On sait que les segments [ES] et [ET] mesurent 12 cm et que l'aire du triangle SET est 42 cm^2.

1) Démontrer que la mesure h du segment [SH] est égale à 7 cm.

2) Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur EH.
Calculer la mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{SET}$.



Exercice 26

On accède au garage situé au sous-sol d'une maison par une rampe [AC].

On sait que : AC = 10,25 m ; BC = 2,25 m.

1) Calculer la distance AB entre le portail et l'entrée.
2) Calculer à un degré près par excès la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 27

Compléter la figure ci-après d'après le texte qui suit.

L'unité est le centimètre.

(C) est le cercle de centre O et de diamètre [AB].

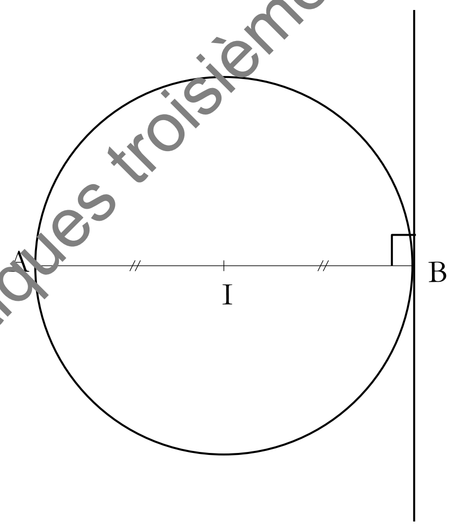
Δest la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (AB).

On donne AB = 6.

1. Placer un point C sur la droite Δ tel que BC = 2,5. Calculer AC.

2. Donner l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. On appelle M le deuxième point d'intersection de la droite (AC) et du cercle (C). Démontrer que le triangle ABM est rectangle en M.



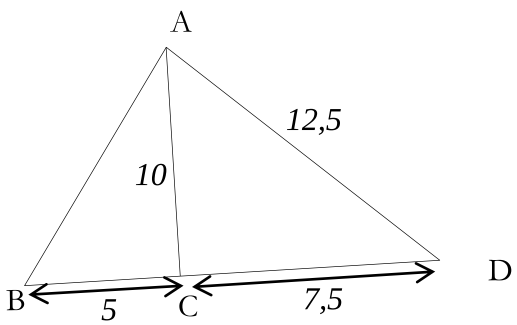
Exercice 28

1) Construire un triangle IJK tel que : JK = 8 cm ; IJ = 4,8 cm ; KI = 6,4 cm.
2) Démontrer que le triangle IJK est un triangle rectangle.
3) Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IJK}$. Donner la valeur arrondie au degré le plus proche.

Exercice 29

La figure ci-contre est volontairement inexacte.

1) L'unité étant le cm, faire une figure aux mesures exactes.
2) Démontrer que le triangle ACD est rectangle en C.
3) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.
4) Calculer l'aire du triangle ABD en cm^2.
5) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$ au degré près.
6) En déduire, sans nouveau calcul, une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$.



Exercice 30

Pour tout l'exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

1) Construire un triangle ABC tel que : AB = 4,5 ; BC = 6 et AC = 7,5.
2) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
3) Montrer, par un calcul, que l'arrondi au degré de la mesure de $\widehat{BAC}$ est 53°.

4) Construire le cercle de centre A et qui passe par C ; il coupe [AB) en un point D.
5) Quelle est la nature du triangle ADC ? Justifier.

Exercice 31

Construire dans chacun des cas suivants un angle dont le cosinus est:

$\cos\widehat{xOy} = 1/3$; $\cos\widehat{xOy} = 1/4$; $\cos\widehat{xOy} = 1/2$; $\cos\widehat{xOy} = 3/4$; $\cos\widehat{xOy} = 2/3$.

Exercice 32

1) Construire un rectangle ABCD tel que, en cm, AB = 3 et BC = 10. Placer le point I du segment [BC] tel que BI = 1.
2) Démontrer que les droites (AI) et (ID) sont perpendiculaires.

Exercice 33

ABCD est un rectangle tel que AB = 7 cm et AD = 6 cm. I est le point de [AD] tel que AI = 2 et M est le point de [AB] tel que AM = 3. Le triangle MIC est-il rectangle ? Justifier.

Exercice 34

1. Construction

Soit ABC un triangle. On appelle:

- O le centre du cercle (C) passant par A, B et C.
- F le point diamétralement opposé à A.
- K le point d'intersection de la hauteur issue de A avec le cercle.
- M le milieu du côté [BC].
- H le point d'intersection des droites (FM) et (AK).
- G le point d'intersection des droites (OH) et (AM).

2. Démontrer que :

1) AFK et AFC sont des triangles rectangles.
2) (OM) est la médiatrice du côté [BC].
3) les droites (OM) et (AK) sont parallèles.
4) M est le milieu du segment [HF].
5) BHCF est un parallélogramme.
6) les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
7) H est l'orthocentre du triangle ABC.
8) G est le centre de gravité du triangle AHF.
9) G est aussi le centre de gravité du triangle ABC.

3. Conclusion

Le point O centre du cercle circonscrit, le point H orthocentre et le point G centre de gravité du triangle ABC sont alignés. La droite qui les contient est appelée droite d’EULER du triangle.

Exercice 35

Soit un triangle ABC, et H son orthocentre.

1) Faire une figure.
2) Déterminer l’orthocentre des triangles HBC et HAC. **Justifier.**

Exercice 36

Construire un parallélogramme ABCD. Construire K, le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par B.
Démontrer que KCD est rectangle en C.

Exercice 37

ABCD est un rectangle. La médiatrice de [AC] coupe la droite (AB) en E et la droite (BC) en F.
Démontrer que les droites (CE) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 38

O est le milieu de [AB].
ABL et ABK sont deux triangles rectangles en L pour l'un et en K pour l'autre.
L et K sont situés du même côté de [AB].
Quelle est la nature du triangle OLK ?

Exercice 39

A, I et O sont 3 points non alignés. On appelle B le symétrique de A par rapport à O, et C le symétrique de B par rapport à I.
1) Que représente la droite (AI) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
2) Que représente la droite (CO) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
3) On appelle G le point d'intersection des droites (AI) et (OC).
4) Démontrer que la droite (BG) coupe le segment [AC] en son milieu.

Exercice 40

ABCD est un parallélogramme de centre O. On appelle I et J les milieux respectifs de [AD] et [CD].
1) Démontrer que les droites (AJ), (CI) et (BD) sont concourantes.
2) On appelle G ce point de concours. En supposant que la diagonale [BD] mesure 54 cm de long, calculer la distance OG.

Exercice 41

A, B, C sont trois points distincts d'un cercle de centre O et [AD] un diamètre de ce cercle.
1) Quelle est la nature des triangles ABD et ACD ?
2) La parallèle à (BD) passant par C coupe (AB) en E. Démontrer que (CE) est une hauteur du triangle ABC.
3) La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe le cercle en A et J, la droite (CE) en H et la droite (BC) en I. Que représente H pour le triangle ABC ? En déduire que (BH) est perpendiculaire à (AC). Montrer que (BH) est parallèle à (CD).
4) Démontrer que BHCD est un parallélogramme. On appelle K le point d'intersection de ses diagonales. Que représente K pour le segment [HD]?
5) Quelle est la nature du triangle ADJ ? En déduire que (CI) et (DJ) sont parallèles.