Mathématiques

Cours de vacances

Entrée en Seconde

76/78 rue Saint Lazare – 75009 Paris
eib-adistance.com

Séquence 1 :

I. Les différents types de nombres

II. Calculs avec les rationnels

III. Utilisation des lettres

IV. Figures géométriques de base

V. Représentation des solides

Séquence 2 :

I. Les puissances

II. Calculs d'aires et de volumes

III. Transformations géométriques

IV. Le triangle rectangle

V. Statistique et proportionnalité

Séquence 3 :

I. La notion de fonction

II. Organisation des calculs

III. Transformations des écritures algébriques

IV. Développements et factorisations

V. Equations

Séquence 4 :

I. La racine carrée

II. Enoncé de Thalès

III. Fonctions affines et linéaires

IV. Trigonométrie

V. Les probabilités

Séquence 1

I. Les différents types de nombres

Dans ce paragraphe, nous commencerons par donner une liste des différents ensembles de nombres qui seront manipulés en mathématiques et autres matières scientifiques dans les classes supérieures puis nous donnerons quelques outils d'arithmétique en particulier avec la notion de division euclidienne.

1) Les ensembles de nombres

a) Les entiers

La suite infinie $0; 1; 2; 3\ etc$. Forme l'ensemble des nombres entiers naturels. Cet ensemble est désigné par la lettre $\mathbb{N}$.

L'assertion $4 \in \mathbb{N}$ signifie que 4 est un entier naturel.

L'assertion $-7{,}3 \notin \mathbb{N}$, signifie que $-7{,}3$ n'est pas un entier naturel.

Si, à ces nombres, on ajoute leurs opposés, $-1;\ -2;\ -3;\ -4\ etc$. on forme un ensemble plus grand qui contient tous les entiers naturels, et qui est l'ensemble des **entiers relatifs**, que l'on note $\mathbb{Z}$.

b) Les rationnels

Tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ et\ b \neq 0)$ est appelé nombre **rationnel**.

Ce sont les nombres que l'on appelle en général, des fractions.

L'ensemble de tous les nombres rationnels est désigné par la lettre $\mathbb{Q}$.

Tous les entiers relatifs se trouvent dans $\mathbb{Q}$, car en prenant $b = 1$ alors tout entier relatif a peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{1}$ et vérifie la définition d'un nombre rationnel.

c) Les décimaux

Certains nombres rationnels sont des nombres **décimaux**.

Il suffit pour cela que l'on puisse les écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$

Dans la pratique, on peut dire qu'il s'agit de nombres qui ont une écriture décimale finie ; que l'on peut en écrire tous les chiffres.

Par exemple : $\frac{9}{4}$ est un décimal, mais $\frac{13}{7}$ est un rationnel non décimal.

d) Les irrationnels

Des nombres comme π ou $\sqrt{3}$ ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ et ne sont donc pas des rationnels. Ils portent le nom de nombres **irrationnels**.

L'ensemble formé par tous les nombres (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres **réels** et est noté $\mathbb{R}$. Il sera étudié dans les années à venir.

2) Un peu d'arithmétique

Définition : Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver deux nombres entiers q et r tels que $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

Propriété (critères de divisibilité) : Un nombre entier n est divisible par :

2 si son chiffre des unités est $0; 2; 4; 6$ ou 8.

3 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3.

5 si le chiffre de ses unités est 0 ou 5.

9 si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 9.

Définition : Soit a un nombre entier relatif. On dit que a est un **nombre premier** s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Exemple et contre-exemple :

31 est un nombre premier car il a exactement deux diviseurs positifs qui sont 1 et lui-même.

49 n’est pas un nombre premier car il a 7 comme diviseur positif.

Remarque : 1 n’est pas un nombre premier car il n’a pas exactement deux diviseurs positifs.

Propriété : Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique (à l’ordre près des facteurs).

Exemple : On peut décomposer 84 en $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$.

Définition : Soit a un nombre de $\mathbb{Z}$ et b un nombre de $\mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.

Dire que a est un **multiple** de b signifie qu’il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $a = k \times b$.

On dit aussi que b est un **diviseur** de a ou que a est **divisible** par b.

Remarque : b est un diviseur de a lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0.

Exemples :

0 est multiple de tout nombre b de $\mathbb{N}$ $(0 = 0 \times b)$ et tout nombre a de $\mathbb{Z}$ est multiple de 1 $(a = a \times 1)$.

-8 est un multiple de 4. En effet, $-8 = -2 \times 4$. Ainsi, -8 est divisible par 4 ou 4 est un diviseur de -8.

5 n’est pas un multiple de 2. En effet, $5 = 2.5 \times 2$ mais $2.5 \notin \mathbb{Z}$.

Propriété : Soit n un nombre de $\mathbb{N}$. La somme de deux multiples du nombre n est un multiple de n.

II. Calculs avec les rationnels

Dans ce paragraphe, nous allons énoncer les différentes règles de calcul sur les rationnels, appelés plus couramment fractions.

1) Simplification des fractions

Règle de transformation des fractions :

La valeur d'une fraction ne change pas lorsque l'on multiplie (ou l'on divise) le numérateur et le dénominateur par un même nombre

Une fraction que l'on ne peut pas ou plus simplifier est dite "**irréductible**".

On obtiendra une fraction irréductible en divisant numérateur et dénominateur par leur PGDC. On dit alors que l'on a simplifié la fraction (sous-entendu le plus possible).

Exemple :

Le PGDC à 18 et 27 est 9, donc en divisant 18 et 27 par 9, on obtient : $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ qui est une fraction irréductible.

2) Addition (et soustraction) des fractions

Méthode :

- Simplifier les fractions
- Les mettre au même dénominateur
- Addition des numérateurs
- Simplifier le résultat lorsque c'est possible

Exemple :

Calculer $A = \frac{45}{162} + \frac{28}{96}$

Commencer par simplifier les fractions :

$\frac{45}{162} = \frac{5\times9}{18\times9} = \frac{5}{18}$ et $\frac{28}{96} = \frac{7\times4}{24\times4} = \frac{7}{24}$, d'où $A = \frac{5}{18} + \frac{7}{24}$

Mettre les fractions au même dénominateur :

$72 = 18 \times 4 = 24 \times 3$, donc $\frac{5}{18} = \frac{5\times4}{18\times4} = \frac{20}{72}$ et $\frac{7}{24} = \frac{7\times3}{24\times3} = \frac{21}{72}$

D'où $A = \frac{20}{72} + \frac{21}{72} = \frac{41}{72}$

Recherche du dénominateur commun :

Le **dénominateur commun** est le plus petit multiple commun aux dénominateurs initiaux
Pour le trouver rapidement (par exemple pour 18 et 24) :

On cherche parmi les multiples du plus grand le premier qui est aussi multiple de l'autre.

Les multiples de 24 : 24 n'est pas un multiple de 18

48 n'est pas un multiple de 18

72 est un multiple de 18, donc c'est le nombre cherché.

3) Multiplication des fractions

Règle des signes :

Le signe d'un produit dépend du nombre de facteurs négatifs.

S'il est pair, le produit est positif.

S'il est impair, le produit est négatif.

Exemples :

$(-5) \times (+6) = -30$; $(-8) \times (-7) = +56$

Remarque : Le produit d'un nombre par (–1) est l'opposé de ce nombre.

Produit de fractions : (simplifications préalables).

Calculs	Méthodes
$A = \left(-\frac{7}{3}\right) \times \left(-\frac{24}{13}\right) \times \frac{39}{35}$	S'occuper d'abord du signe : 2 signes moins donc produit positif
$A = \frac{7}{3} \times \frac{3 \times 8}{13} \times \frac{3 \times 13}{7 \times 5}$	Faire apparaître les facteurs présents dans les différents nombres
$A = \frac{7}{7} \times \frac{3}{3} \times \frac{13}{13} \times \frac{8 \times 3}{5}$	En déplaçant les facteurs, faire apparaître des fractions unité.
$A = \frac{24}{5}$	Donner le résultat sous forme irréductible.

4) Division des fractions

Définition : Tout nombre non nul admet un **inverse**.

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Remarques :

Un produit ayant un facteur égal à 0 est lui–même nul.

Deux nombres inverses sont de même signe.

0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse.

Règle de la division :

Diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse.

Exemples : $\frac{5}{8} = 5 \times \frac{1}{8}$ $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{7}$

Généralisation : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ avec b, c et d non nuls.

III. Utilisation des lettres

Dans ce paragraphe, nous allons montrer l'intérêt et la nécessité d'utiliser des lettres en mathématiques. Puis nous énoncerons certaines « conventions » afin de rendre cet outil le plus maniable possible.

1) Utilisation d'expressions littérales

Une expression est littérale lorsque des nombres sont représentés par des lettres.

On a déjà utilisé des lettres pour :

– énoncer une formule :

Plutôt que d'écrire : " Le périmètre d'un cercle est égale au produit de π par le diamètre du cercle", on donne une formule littérale : $P = \pi D$.

– décrire une règle de calcul :

$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$ permet de traduire simplement la règle qu'il faudrait énoncer ainsi : « La somme de deux fractions de même dénominateur est égale à la fraction dont le numérateur est la somme des numérateurs et dont le dénominateur est le dénominateur commun."

– désigner un nombre inconnu dans les équations :

Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à 8,4 cm.

Quelle est la longueur des deux côtés égaux si le troisième côté mesure 5 cm ?

On appelle l la longueur du côté cherché. On peut écrire : $2 \times l + 5 = 8{,}4$.

– exprimer "en fonction de" :

Exprimer "en fonction de ...", c'est écrire une expression qui dépend de ....

Exprimer l'aire du disque en fonction du rayon R et de π : $A = \pi R^2$.

Si on sait que $R = 3\,cm$ et que l'on veut exprimer l'aire en fonction de π : $A = 9\pi$.

2) Deux types de lettres utilisées

Si une lettre représente un nombre qui peut prendre une valeur quelconque dans un ensemble de nombres, on dit que c'est une **variable**.

Si au contraire, la valeur attribuée à la lettre est connue et toujours la même, on dit que c'est une **constante.**

Exemple : Dans la formule de calcul de l'aire d'un disque, $A = \pi R^2$.

R (rayon) est une variable, valeur quelconque dans les décimaux positifs.

π est une constante : sa valeur ne change pas, ce n'est que l'arrondi que l'on choisit qui peut varier suivant les problèmes et la précision souhaitée.

3) Les écritures littérales classiques

Si a et b désignent deux nombres :

$a + b$ désigne leur somme ab leur produit

$\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$: leur quotient a^2; b^2 : leurs carrés

$-a$ et $-b$: leurs opposés $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$: leurs inverses

D'autres écritures que l'on peut décrire :

$2a$: double de a $\frac{a}{2}$: moitié de a

$2n$ avec n entier : un nombre pair $2n + 1$ avec n entier : un nombre impair

$(a + b)^2$: le carré de la somme de a et de b

$a^2 + b^2$: la somme des carrés de a et de b

4) Convention d'écritures dans les produits

Afin d'alléger les écritures, on convient des règles suivantes :

Le signe de la multiplication ($\times$) disparaît ou est remplacé par un point :

– entre deux lettres : $a \times b$ s'écrit ab

– entre un nombre et une lettre : $3 \times a$ ou $a \times 3$ s'écrit $3a$

– entre des nombres, des lettres et des parenthèses : $4 \times a \times (2x + 1)$ s'écrit $4a(2x + 1)$

Les facteurs s'écrivent dans l'ordre suivant :

1. Les nombres
2. Les lettres et dans l'ordre alphabétique
3. Les parenthèses

Exemples : $a \times 2 \times b$ s'écrit $2ab$ $a \times (x+2) \times (-5) \times b$ s’écrit $-5ab(x+2)$

On conserve les parenthèses et le signe $\times$ dans certains cas :

$5 \times (-8)$: des parenthèses pour séparer $\times$ et $-$

4×35 : sans le signe $\times$ on lirait 435

Remarques : $1 \times a$ s’écrit a ; $(-1) \times a$ s’écrit $(-a)$; $\frac{a}{1}$ s’écrit a

IV. Figures géométriques de base

Dans ce paragraphe, nous allons faire une liste de différentes figures géométriques classiques, en commençant par les droites, puis les triangles et pour finir avec un cas particulier de quadrilatères : les parallélogrammes.

1) Deux droites particulières

a) La médiatrice d'un segment

Définitions : Si A et B sont symétriques par rapport à une droite (D), on dit que (D) est l'**axe de symétrie** du segment $[AB]$.

L'axe de symétrie d'un segment s'appelle **la médiatrice** de ce segment.

Propriété : La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Propriété : Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est situé à la même distance des deux extrémités de ce segment.

Propriété : Si un point est **équidistant** des extrémités d'un segment alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.

Remarque : Ces deux dernières propriétés sont appelées des réciproques.

b) La bissectrice d'un angle

<u>Définition :</u> La **bissectrice** d'un angle est la demi–droite qui est axe de symétrie de l'angle.

<u>Propriété :</u> Si un point est situé sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.

Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est situé sur la bissectrice de cet angle

2) Le triangle

<u>Propriété (inégalité triangulaire) :</u> Dans un triangle, un côté est toujours plus petit que la somme des deux autres.

Lorsqu'une longueur est égale à la somme des deux autres, les trois points sont alignés.

<u>Propriété (somme des angles) :</u> La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

<u>Définition :</u> Une **hauteur** dans un triangle est un segment issu d'un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

<u>Propriétés (aire du triangle) :</u>

- Dans un triangle quelconque, il y a trois côtés et pour chacun d'eux, une hauteur associée. Il y a donc trois manières de calculer l'aire : si c désigne la longueur d'un côté et h la longueur de la hauteur associée : $A = \frac{c \times h}{2}$.
- Dans un triangle rectangle, il n'y a plus que deux manières de calculer l'aire : si c désigne la longueur de l'hypoténuse et h la longueur de la hauteur associée, et si a et b désignent les longueurs des deux côtés de l'angle droit : $A = \frac{c \times h}{2} = \frac{a \times b}{2}$.

<u>Propriété (hauteurs d'un triangle) :</u> Les trois hauteurs d'un triangle (ou les droites qui les portent) sont concourantes.

Le point de concours s'appelle **l'orthocentre** du triangle.

Définition : Une **médiane** dans un triangle est le segment joignant un sommet au milieu du côté opposé. C'est un segment qui partage le triangle en deux triangles de même aire.

Propriété (médianes d'un triangle) : Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Le point de concours s'appelle le **centre de gravité** du triangle.

Définition : Lorsque tous les sommets d'une figure sont situés sur le même cercle, on dit que le cercle est circonscrit à la figure et que la figure est inscrite dans le cercle.

Propriétés : Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

Le point de concours des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Définition : Des triangles semblables sont des triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

Propriété : Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Propriété : Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

Propriété : Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

3) Les parallélogrammes

Propriété : Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors c'est un **parallélogramme**.

On peut traduire cette propriété de la manière suivante : Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est suffisant qu'il ait ses côtés deux à deux parallèles.

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.

Propriété : Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.

Et les réciproques :

Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés sont parallèles deux à deux.

On peut traduire cette propriété de la manière suivante : Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire qu'il ait ses côtés deux à deux parallèles.

Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.

Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure.

4) Parallélogrammes particuliers

Sans revenir en détail sur ce qui a été étudié dans les classes antérieures, voici une liste de propriétés permettant de montrer la nature des parallélogrammes particuliers. Ce sont les principales, on pourrait en trouver d'autres.

- Rectangle

Si un quadrilatère a trois angles droits, …

Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et de même milieu, …

Si un parallélogramme a un angle droit, …

Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, …

Alors, dans chacun de ces cas, c’est un **rectangle**.

- Losange

Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, …

Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu, …

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, …

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, …

Alors, dans chacun de ces cas, c’est un **losange**.

- Carré

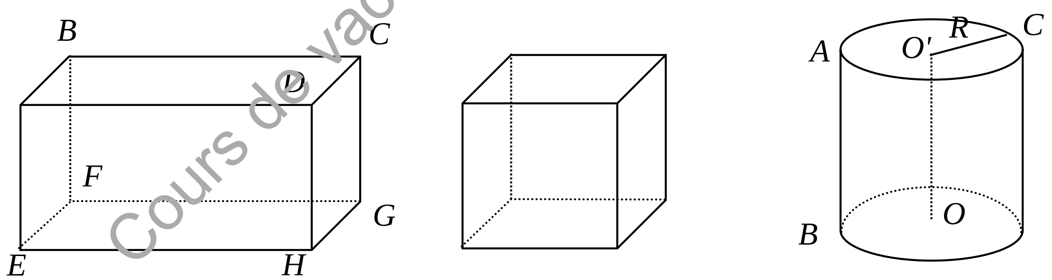
Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors c’est un **carré**.

Il suffit donc de combiner les propriétés énoncées ci–dessus.

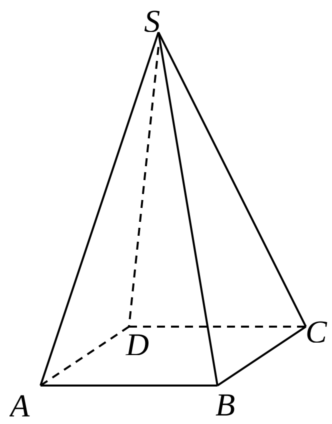
V. Représentation des solides

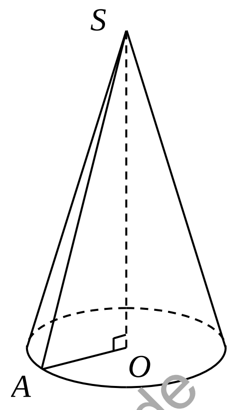
Dans ce paragraphe, nous augmenterons d’une dimension notre étude afin de décrire et d’étudier certains objets de la vie courante en trois dimensions.

1) Les différents types de solides



Le **pavé droit** (et le cas particulier du **cube**), ainsi que le **cylindre de révolution** peuvent être considérés comme étant de même nature (un empilement "vertical" de surfaces toutes identiques à la base).



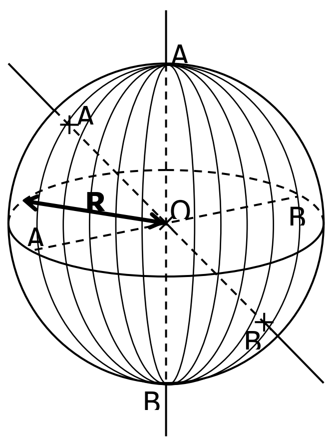


La **pyramide** et le **cône** peuvent former une deuxième catégorie. On peut les considérer comme un empilement de surfaces de même forme mais de plus en plus petites de la base vers le sommet.

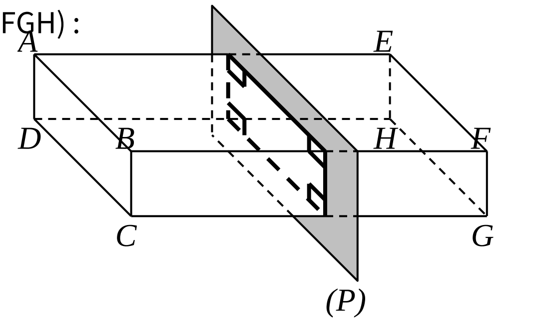
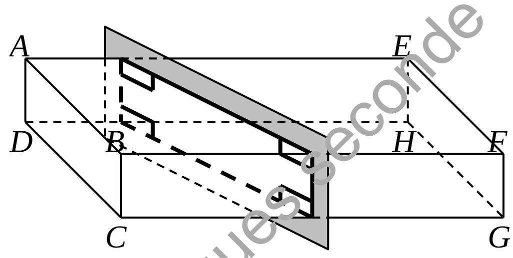
<u>Définition :</u> Soit O un point de l'espace. On appelle sphère de centre O et de rayon R l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés à une distance R du point O.

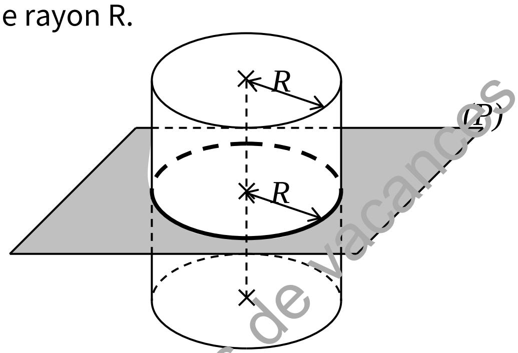
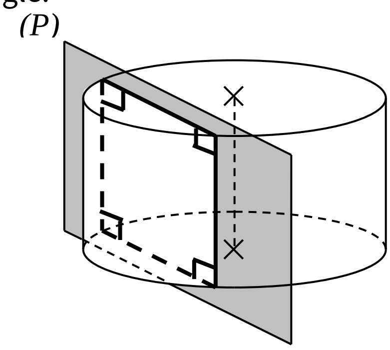
Les segments $[AB]$, $[A_1B_1]$ et $[A_2B_2]$ sont des diamètres de la sphère.

On dit que les points A et B sont diamétralement opposés.

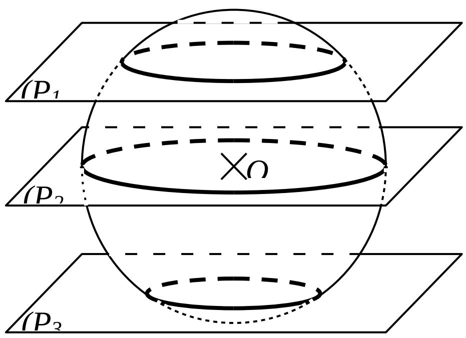


2) Sections de solides par un plan

La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle identique à cette face. Exemple : Le plan (P) est parallèle à la face ABCD (ou EFGH) : 	La section d'un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un rectangle. Exemple : Le plan (P) est parallèle à l'arête [AD] (ou [BC] ou [EH] ou [FG]) : 

La **section d'un cylindre** de rayon R par un plan parallèle aux bases est un cercle de rayon R. 	La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe de révolution est un rectangle. 

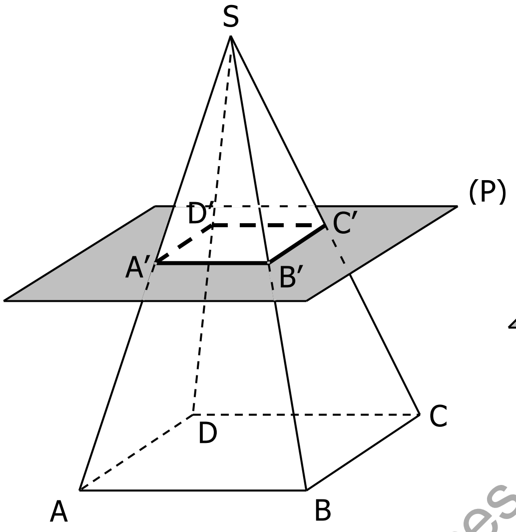
La **section d'une sphère par un plan** est un disque.

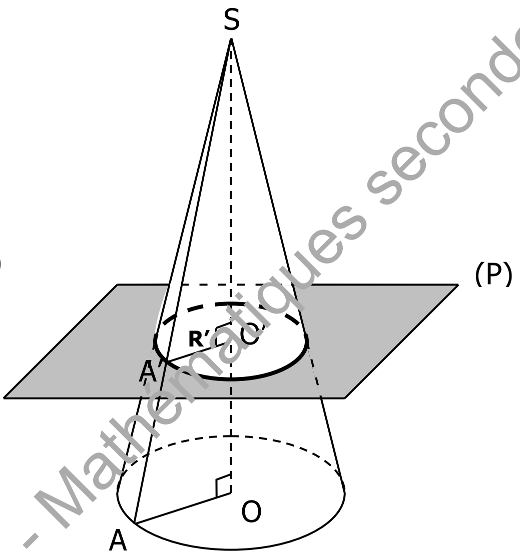


Sections d'une pyramide ou d'un cône par un plan

La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est **une réduction** de la base.

C'est à dire que c'est une figure de même nature (rectangle, carré, cercle…) mais dont les longueurs sont proportionnelles à celles de la base.





Propriété : Dans un agrandissement (ou une réduction) de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées (ou divisées) par k.
- Les aires sont multipliées (ou divisées) par k^2.
- Les volumes sont multipliés (ou divisées) par k^3.

Exercices non à soumettre

Exercice 1 : Effectuer les calculs suivants ; dans chaque cas, le résultat sera présenté :
– sous forme de fraction irréductible

– partie entière + partie décimale

– valeur décimale ou arrondie si le résultat n'est pas décimal.

(Toujours commencer par les éventuelles simplifications)

a) $\frac{63}{54}+\frac{30}{48}$ b) $\frac{35}{60}-\frac{78}{108}$ c) $\frac{189}{234}+\frac{70}{273}$ d) $\frac{77}{84}-\frac{176}{165}$

e) $\frac{55}{132}-\frac{35}{90}+\frac{66}{36}$ f) $\frac{16}{60}+\frac{49}{63}-\frac{104}{65}$ g) $\frac{45}{70}-\frac{20}{16}-\frac{18}{48}$ h) $\frac{115}{25}-4$

i) $\frac{27}{126}+2$ j) $7+\frac{30}{72}$

Exercice 2 : Mêmes consignes que l'exercice précédent.

a) $\frac{9}{162}+\frac{4}{48}-1$ b) $\frac{36}{27}\times\frac{14}{20}$ c) $\frac{45}{20}\times\frac{30}{9}$ d) $\frac{16}{162}\times\left(-\frac{27}{14}\right)$

e) $\left(-\frac{49}{21}\right)\times\frac{30}{245}$ f) $-\frac{70}{75}\times\left(-\frac{10}{6}\right)$ g) $\frac{108}{81}\div\left(-\frac{36}{27}\right)$ h) $182\div\left(-\frac{26}{3}\right)$

i) $\left(3-\frac{9}{13}\right)\times\left(4-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}\right)$ j) $\left(2-\frac{30}{13}\right)\div\left(2-\frac{21}{18}+\frac{1}{3}\right)$

Exercice 3 : Donner une écriture littérale traduisant chacune des phrases suivantes :
a) Le carré du produit de deux nombres est égal au produit des carrés de ces deux nombres.

b) L'opposé de l'inverse d'un nombre non nul est égal à l'inverse de son opposé.

c) Le produit des inverses de deux nombres non nuls est égal à l'inverse de leur produit.

Exercice 4 : Traduire par un énoncé clair et précis chacune des écritures littérales suivantes :

a) $A=\pi R^2$ (aire du disque de rayon R)

b) $V=B\times h$ (volume d'un cylindre de révolution)

c) $A=\frac{ab}{2}$ (aire d'un triangle rectangle)

d) $-(a-b)=b-a$

e) $\frac{na}{nb}=\frac{a}{b}$

Exercice 5 :

1) a) Calculer : $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$; $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$; $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$.

b) Mélanie conjecture que, pour chaque calcul, le résultat est le carré d'un entier. Que peut-on en penser ?

2) Soit n un nombre entier. On note $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$

a) Vérifier que $(n+1)(n+2) = n(n+3) + 2$

b) On pose $a = (n+1)(n+2)$. Expliquer pourquoi $p = a(a-2)$

c) En déduire que $p + 1 = (a-1)^2$

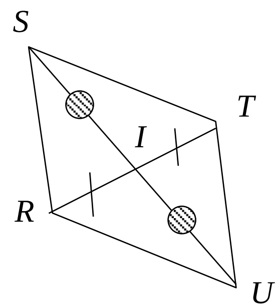
d) Peut-on affirmer que le résultat est le carré d'un entier ? Justifier.

Exercice 6 : Construire un triangle ABC d'orthocentre H avec : $BC = 8\ cm$, $BH = 5\ cm$ et $CH = 4{,}5\ cm$.

Exercice 7 :
1) Construire un triangle ABC inscrit dans un cercle γ de centre O, tel que $\widehat{AOB} = 100°$ et $\widehat{AOC} = 140°$.
2) Déterminer par le calcul les mesures des angles du triangle ABC. 3) Soit H l'orthocentre de ABC, calculer les mesures des angles $\widehat{AHB}$, $\widehat{BHC}$ et $\widehat{CHA}$.

Exercice 8 : Voici une figure codée et une démonstration.
Il faut à partir de cela, faire une liste des données de ce problème.

Puis rédiger un énoncé de ce problème.



U est le symétrique de S par rapport à I., donc I est le milieu de $[SU]$.

On sait que I est le milieu de $[RT]$.

Donc $[RT]$ et $[SU]$ ont le même milieu.

Or, si un quadrilatère a les diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.

Donc $RSTU$ est un parallélogramme.

Exercice 9 : Pour l'énoncé qui suit, les dix phrases de la démonstration ont été mélangées. Il faut les remettre en ordre pour qu'elles répondent correctement à la question posée. On s'aidera d'une figure à main levée.

Énoncé : Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A coupe (BC) en H. E est le symétrique de H par rapport au milieu I de $[AC]$.Démontrer que $AHCE$ est un rectangle.

Les dix phrases de la démonstration :

- Donc $AHCE$ est un rectangle.
- On sait que I est le milieu de $[AC]$
- Donc l'angle $\widehat{AHC}$ est droit.
- On sait que E et H sont symétriques par rapport à I.
- Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Donc $[HE]$ et $[AC]$ se coupent en leur milieu.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
- Donc I est le milieu de $[HE]$.
- On sait que $[AH]$ est une hauteur du triangle ABC.
- Donc $AHCE$ est un parallélogramme.

Exercice 10 : Soit un cercle γ de centre O, et un point A de ce cercle. La médiatrice de $[OA]$ coupe γ en deux points B et C. Démontrer que $CABO$ est un losange.

Exercice 11 : Les diagonales d'un parallélogramme $ELFU$ se coupent en O. Les milieux respectifs de $[OU]$ et de $[OL]$ sont les points C et R. Démontrer que $CERF$ est un parallélogramme.

Exercice 12 : ABC est un triangle tel que $AB = 6\ cm$ et $BC = 4\ cm$. D est le point du côté $[AC]$ tel que $CD = 1{,}2\ cm$. E est le point du côté $[BC]$ tel que $\widehat{CDE} = \widehat{ABC}$.

1) Démontrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.

2) Calculer la longueur ED.

Envoyer le devoir à soumettre n°1