



LE CHOIX
D'UNE AUTRE
SCOLARITÉ

MATHEMATIQUES RENFORCÉES

Cinquième

Premier trimestre -

Extrait de cours Mathématiques renforcées

SÉQUENCE 3

CHAPITRE 2 : LES NOMBRES DECIMAUX

7. Quotients ; définition d'un décimal

❶ $99 \div 36$

$$\begin{array}{r} 99 \\ 270 \quad | \quad 36 \\ 180 \\ 0 \end{array}$$

❷ $43 \div 7$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 10 \quad | \quad 7 \\ \uparrow 30 \\ | \quad 20 \\ | \quad 60 \\ | \quad 40 \\ | \quad 50 \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \quad 1 \end{array}$$

Le même nombre 1 réapparaissant au reste, le même cycle de calculs et de nombres va se répéter infiniment.

Il y a deux types de quotients :

- ❶ Écriture finie : nombre décimal
- ❷ Écriture infinie : nombre non-décimal

Définitions

Un **nombre décimal** est un nombre que l'on peut écrire car son **écriture décimale** est finie.

Un nombre dont l'écriture est infinie n'est pas décimal.

Un nombre décimal pourra toujours être considéré comme en entier dans l'unité qui convient.

En particulier, les nombres entiers sont des nombres décimaux.

Par exemple : 0,12 est 12 centièmes ; 54,167 est 54 167 millièmes.

Tout nombre décimal pourra s'écrire comme quotient d'un nombre entier par une puissance de 10. (**fraction décimale**)

$$\text{Par exemple : } 0,12 = 12 \text{ centièmes} = \frac{12}{100} ; 54,167 = 54 \text{ 167 millièmes} = \frac{54 \ 167}{1 \ 000}$$

Un nombre non décimal obtenu comme quotient de deux nombres entiers a une écriture périodique. La période de ce nombre est le groupe de chiffres qui se répètent infiniment

dans son écriture.

Par exemple :

Le nombre : 15,142142142142... a une période de 3 chiffres : 142

Le nombre : 37,469546954695... a une période de 4 chiffres : 4695

Arrondi ou encadrement

Quand une division ne s'arrête pas, il faut faire un choix pour la présentation du « résultat ». Le **seul résultat exact** sera toujours l'écriture en ligne de la forme $D = d \times q + r$.

Mais, selon les situations, différentes présentations de résultats approchés sont possibles : on peut tronquer, encadrer ou arrondir la valeur du quotient.

Pour tronquer un résultat : on « coupe » au rang indiqué et on « laisse tomber » les chiffres à droite de la coupure. On obtient ainsi la **troncature** du nombre.

Pour arrondir un résultat : on tronque d'abord le nombre au rang indiqué puis :

- Si le chiffre qui suit est supérieur ou égal à 5 alors on augmente de 1 le dernier chiffre de la troncature ;
- Si le chiffre qui suit est inférieur à 5 alors on garde la troncature.

Exemple : Pour le nombre 2,536536536... :

	troncature		arrondi
à l'unité	2	après le 2, il y a un 5, donc	3
au dixième	2,5	après le 5, il y a un 3, donc	2,5
au centième	2,53	après le 3, il y a un 6, donc	2,54

Pour encadrer un quotient : le quotient est encadré par sa troncature et par le nombre obtenu en ajoutant 1 au dernier chiffre de sa troncature.

Exemple : Pour le quotient de 43 par 7 calculé plus haut :

	troncature	encadrement
à l'unité	6	$6 < q < 7$
au dixième	6,1	$6,1 < q < 6,2$
au centième	6,14	$6,14 < q < 6,15$

Les différentes étapes du calcul du quotient

Effectuer une division se fera toujours selon les trois étapes suivantes :

- 1) Calcul de l'ordre de grandeur pour déterminer la position de la virgule dans le quotient
- 2) Calcul du quotient des nombres débarrassés de leur virgule éventuelle.
- 3) Choix de la présentation du résultat.

Dans les leçons suivantes, sont rappelées les méthodes pour :

- les calculs d'ordre de grandeur
- le calcul du quotient

Exercices d'application page suivante.

Extrait de cours Mathématiques renforcées

Exercice 69

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?

3,5 ; 5,417 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; 12 ; $45 \div 7$

Exercice 70

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$\frac{5}{100}$	$\frac{1\ 875}{1\ 000}$	$\frac{7}{10^4}$	$\frac{653}{10^2}$
$\frac{895\ 462}{10^5}$	$\frac{9\ 350}{10}$		

Exercice 71

Mettre les nombres décimaux suivants sous la forme d'un quotient dont le diviseur est une puissance de 10

12,1 ; 74,52 ; 0,524 ; 0,005 ; 128

Exercice 72

Si un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^5}$ (où a est un entier qui n'est pas multiple de 10), combien

aura-t-il de chiffres après la virgule ?

Vérifier en écrivant les nombres $\frac{348}{10^5}$ et $\frac{4\ 578\ 621}{10^5}$ avec une virgule.

Exercice 73

Compléter les pointillés avec des puissances de 2 ou de 5 :

$5^3 \times \dots = 10^3$ $2^4 \times \dots = 10^4$ $5^2 \times 2^5 \times \dots = 10^{\dots}$

Exercice 74

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$\frac{17}{2^2}$	$\frac{23}{5^4}$	$\frac{27}{2^3 \times 3}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{7}{2^7 \times 5^4}$
------------------	------------------	---------------------------	-----------------	----------------------------

Exercice 75

Les nombres suivants : $\frac{52}{2}$; $\frac{25}{8}$; $\frac{57}{32}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$ sont-ils des nombres décimaux ? Pour le

déterminer, essayer de mettre ces nombres sous la forme $\frac{a}{10^n}$ et, dans ce cas, préciser les

valeurs de a de n.

Exercice 76

1) Quels sont les arrondis à l'unité, au dixième et au centième du nombre 1,73205 ?

2) Quels sont les arrondis à l'unité, au dixième et au centième du nombre 3,0507 ?

Exercice 77

Arrondir à l'unité les nombres suivants :

32,45 ; 133,67 ; 15 000,000 1 ; 1 346 ; 0,999 ; 0,099 9 ;
5,51 ; 5,451.

Exercice 78

Arrondir au dixième les nombres suivants :

3,141 592 6 ; 3,51 ; 3,93 ; 3,99.

Exercice 79

Arrondir au centième les nombres suivants :

3,141 592 6 ; 2,164 ; 2,1 ; 2,166.

Exercice 80

Donner un nombre décimal dont la troncature au dixième est égale à l'arrondi au dixième et dont la troncature au centième n'est pas égale à l'arrondi au centième.

Exercice 81

Après avoir posé les divisions, donner les arrondis à l'unité, au dixième et au centième des quotients : $413 \div 3$; $192 \div 77$; $290 \div 54$

Exercice 82

Expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir 10 chiffres dans la période de $\frac{1}{7}$

Exercice 83

Quel est le 37^e chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}$?

Exercice 84

Quel est le 135^e chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du quotient $779 \div 513$?

Exercice 85

Soit n le nombre dont l'écriture est infinie et périodique : $4,607607607\dots$

Calculer $1\,000 \times n$; en déduire $999 \times n$.

Quels sont les deux entiers dont n est l'écriture du quotient ?

Exercice 86

En prenant modèle sur l'exercice précédent, montrer que les nombres à écriture périodique infinie suivants sont des quotients d'entiers à déterminer :

a : $56,248248248\dots$

b : $3,13951395\dots$

Extrait de cours Mathématiques renforcées

8. Ordre de grandeur d'un quotient

Ordre de grandeur (OG) d'un nombre

a) Si le nombre est plus grand que 1

On ne garde que les chiffres avant la virgule. (la partie entière)

On garde le premier chiffre et on remplace tous les autres par des 0.

On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.

On ajoute 1 au premier chiffre.

On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.

Les deux nombres obtenus encadrent le nombre de départ. On dit que le nombre de départ est « compris entre » ces deux nombres.

On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.

Exemple 1 : 6 854,17

On ne garde que la partie entière $\rightarrow 6\ 854$

On garde le premier chiffre et on remplace tous les autres par des 0 $\rightarrow 6\ 000$

On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.

On ajoute 1 au premier chiffre $\rightarrow 7\ 000$

On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.

Le nombre de départ est « compris entre » ces deux nombres.

$$6\ 000 < 6\ 854,17 < 7\ 000$$

On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.

$$\text{OG}(6\ 854,17) = 7\ 000$$

Exemple 2 : 12 361 024

$$10\ 000\ 000 < 12\ 361\ 024 < 20\ 000\ 000 ; \text{OG}(12\ 361\ 024) = 10\ 000\ 000$$

b) Si le nombre est compris entre 0 et 1.

C'est un nombre dont l'écriture commence par : "0,"

Exemple : 0,0367

On garde le premier chiffre autre que 0, et on retire tous ceux qui le suivent.

0,03

On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.

On ajoute 1 à ce premier chiffre différent de 0.

0,04

On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.

$$0,03 < 0,0367 < 0,04$$

On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.

$$\text{OG}(0,0367) = 0,04$$

$$0,009 < 0,00973 < 0,010 \text{ donc } \text{OG}(0,00973) = 0,01$$

$$0,6 < 0,6024 < 0,7 \text{ donc } \text{OG}(0,6024) = 0,6$$

Ordre de grandeur du produit

Pour calculer l'OG d'un produit, on remplace chacun des facteurs par leur OG, puis on effectue le produit de ces OG de la manière suivante :

Pour calculer l'OG de $672,35 \times 98,026$:

$$\text{OG de } 672,35 : 700 \quad \text{OG de } 98,026 : 100$$

$$\text{OG du produit} : 700 \times 100 = 7 \times 100 \times 100 = 7 \times 10\,000 = 70\,000$$

Pour calculer l'OG de $62,35 \times 34\,512$:

$$\text{OG de } 62,35 : 60 \quad \text{OG de } 34\,512 : 30\,000$$

$$\text{OG du produit} : 60 \times 30\,000 = 6 \times 3 \times 10 \times 10\,000 = 18 \times 100\,000 = 1\,800\,000$$

Pour calculer l'OG de $0,0235 \times 675,2$:

$$\text{OG de } 0,0235 : 0,02 \quad \text{OG de } 675,2 : 700$$

$$\text{OG du produit} : 0,02 \times 700 = 2 \times 7 \times 0,01 \times 100 = 14 \times 1 = 14$$

Le calcul de l'OG ne cherche pas à obtenir un résultat le plus proche du résultat exact. Il s'agit de connaître la « taille » d'un nombre, c'est-à-dire le nombre de chiffres avant la virgule ou bien la position du premier chiffre non nul après la virgule.

Le calcul de l'OG doit être fait de tête en moins de 5 secondes.

Ordre de grandeur d'un quotient

Le calcul de l'OG doit être simple et rapide (de tête). Les calculs que l'on sera amené à faire doivent donc être immédiats. On choisira donc toujours en premier l'OG du diviseur, puis on choisira pour le dividende, un OG qui permet un calcul pour lequel les tables de multiplication suffisent.

Par exemple, pour calculer l'OG de $\frac{992}{293}$, on choisira de calculer $\frac{990}{300}$ (qui donne 3,3 par une

division simple) plutôt que $\frac{1\,000}{300}$ qui ne donne pas un résultat exact rapidement.

Donc, on respecte la règle du choix de l'OG pour le diviseur, et on essaye de s'adapter pour le choix de l'OG du dividende.

Pour : $\frac{3\ 129}{791}$ on prendra $\frac{3\ 200}{800}$; Pour $\frac{41\ 734}{57} : \frac{42\ 000}{60}$; Pour $\frac{65\ 291\ 306}{692} : \frac{70\ 000\ 000}{700}$

Ordre de grandeur et position de la virgule

Le calcul de l'ordre de grandeur permet dans la grande majorité des cas de connaître la position de la virgule, tant dans les produits que dans les quotients.

$672,35 \times 98,026$: OG du produit : 70 000. Le produit aura 5 chiffres avant la virgule, et le premier chiffre sera sans doute un 7 ou un 6.

$0,561 \times 0,00869$: OG du produit : 0,0054. Le premier chiffre différent de zéro sera à la troisième place après la virgule.

$\frac{0,356}{0,0024}$: OG du quotient 200. Le quotient aura 3 chiffres avant la virgule.

$\frac{0,0328}{0,463}$: OG du quotient 0,06. Le premier chiffre autre que 0 sera en deuxième place après la virgule.

Cas particuliers : quand l'OG est une puissance de 10.

Voici deux quotients $A = \frac{42,34}{4\ 428,9}$ et $B = \frac{0,0781}{7,617}$

Les calculs des OG : pour A : $\frac{4\ 428,9}{4\ 000} = 0,01$ pour B : $\frac{0,08}{8} = 0,01$

Les deux quotients ont le même ordre de grandeur, mais les résultats des divisions vont différer sur un point essentiel : la position du premier chiffre avant la virgule.

En effet, par le calcul on obtient au cent millième : $A \approx 0,00956$ et $B \approx 0,01025$

Ces deux résultats sont donc très proches de un centième mais dans un cas le premier chiffre est le troisième après la virgule, dans l'autre c'est le deuxième.

On prendra le temps de prévoir cela (**quand l'OG est une puissance de 10**) en comparant OG $\times d$ à D :

Pour A : $A = \frac{42,34}{4\ 428,9}$: OG $\times d = 0,01 \times 4\ 428,9 = 44,289$ et $D = 42,34$

OG $\times d > D$ donc $A < OG$.

Pour dire les choses simplement : Dans 42,34 il y a moins d'un centième de 4 428,9 donc le quotient est inférieur à 0,01.

Au contraire, pour B, dans 0,0781 il y a plus d'un centième de 7,617 donc B est plus grand que 0,01.

D'autres exemples

$\frac{347,93}{29\ 428,9}$ OG : $\frac{300}{30\ 000} = 0,01$ position de la virgule : 0,0• car $0,01 \times d < D$

$\frac{10,34}{11\ 358}$ OG : $\frac{10}{10\ 000} = 0,001$ pos de la virg : 0,000• car $0,001 \times d > D$

$\frac{406,307}{0,398}$ OG : $\frac{400}{0,4} = 1\ 000$ pos de la virg : •000, car $1\ 000 \times d < D$

Exercice 87

Classer les quotients suivants par ordre croissant après avoir seulement montré le calcul de l'ordre de grandeur :

$$a = 10\,894 \div 534,08$$

$$b = 182,95 \div 93,53$$

$$c = 82,11 \div 0,416$$

Exercice 88

Une entreprise doit rénover son parc informatique. Il faut remplacer 387 ordinateurs.

Donner un ordre de grandeur de la dépense à prévoir pour les trois options suivantes :

Option A : 494,95 € pièce

Option B : 599 € pièce

Option C : 749,50 € pièce

Exercice 89

Un conseil municipal décide d'équiper sa commune de colonnes d'éclairage. Le coût de chaque colonne est (tous frais compris) de 878,80 €

Donner un ordre de grandeur du nombre de colonnes que l'on peut commander en disposant d'un budget de 72 680 €

Exercice 90

Donner l'OG des nombres suivants :

39,213	578,03	1 234 620	97 546,8	34,29
0,00264	0,008769	0,951	0,6357	0,000088

Exercice 91

Calculer les OG des produits suivants :

$6\,547 \times 32,59$	$361,7 \times 0,074$
$44\,318 \times 318,095$	$0,0067 \times 645,18$
$0,0287 \times 0,643$	$0,014 \times 16\,357$
942×994	$66\,854 \times 0,0124$
$284,35 \times 651\,321$	$0,00684 \times 0,793$

Exercice 92

Calculer l'OG des quotients suivants :

Le dividende est plus grand que le diviseur, et ils sont tous les deux plus grands que 1

<u>3 129</u>	<u>542 123</u>	<u>68 754</u>
791	84,61	942
<u>6 574,2</u>	<u>321 045,19</u>	<u>678</u>
76,24	54,34	459
<u>547 031,9</u>	<u>85 640</u>	<u>321 085</u>
426,49	55 841	41,2301

Exercice 93

Calculer l'OG des quotients suivants :

Le dividende est plus grand que le diviseur, et ils sont tous les deux plus petits que 1

<u>0,235</u>	<u>0,356</u>	<u>0,00684</u>	<u>0,955</u>
0,1087	0,0024	0,0000587	0,004762
<u>0,0106</u>	<u>0,03419</u>	<u>0,0003951</u>	<u>0,698</u>
0,00975	0,000774	0,00000846	0,000831

Exercice 94

Calculer l'OG des quotients suivants :

Le dividende est plus petit que le diviseur, et ils sont tous les deux plus grands que 1

<u>542</u>	<u>68,014</u>	<u>994</u>
3 568	64 987,21	77 854,34
<u>2 457</u>	<u>12</u>	<u>661</u>
68 214 736	68 442	32 548

Exercice 95

Calculer l'OG des quotients suivants :

Le dividende est plus petit que le diviseur, et ils sont tous les deux plus petits que 1

<u>0,0328</u>	<u>0,000564</u>	<u>0,00121</u>	<u>0,00008951</u>	<u>0,0003341</u>
0,463	0,879	0,674	0,00035	0,0954