LE CHOIX
D'UNE AUTRE
SCOLARITÉ

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Classe de Terminale

-Première Partie-

76/78 rue Saint Lazare – 75009 Paris
www.eib-adistance.com

Table des matières

SEQUENCE 1

Suites I : Le raisonnement par récurrence

Les trois premières semaines sont dédiées à l'étude des suites. Prenez le temps cette semaine de revoir les notions de première sur ce sujet. Idéalement vous avancerez un peu plus rapidement sur les deux premières semaines, la troisième étant la plus dense.

Dans ce chapitre, nous découvrons un nouveau type de raisonnement, **le raisonnement par récurrence**. Il est utilisé pour établir des propriétés dépendant d'un entier. Par exemple démontrer que pour tout entier n, $4^n - 1$ est un multiple de 3. Les suites étant définies sur les entiers, ce type de raisonnement peut être utilisé pour établir des propriétés pour celles-ci, comme la monotonie, ou un encadrement.

Attendus du chapitre :

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.

I. Rappels

Dans cette section, quelques rappels sur les définitions et propriétés vues en première. Ces rappels ont pour objectif de mettre en avant les propriétés qui seront les plus utilisées dans les chapitres à venir, mais ne sont pas exhaustifs.

Définition 1.1. Une suite (u_n) est **croissante** à partir de l'indice n_0 si et seulement si pour tout pour entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Une suite (u_n) est **décroissante** à partir de l'indice n_0 si et seulement si pour tout pour entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
Si l'inégalité est stricte, on parle alors de strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition 1.2. Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r s'appelle la raison de la suite.

Une suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre réel

q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q s'appelle la raison de la suite.

Propriété 1.1. Une suite est **arithmétique** de raison r si et seulement si pour tout entier naturel $n, u_n = u_0 + nr$.
Une suite est **géométrique** de raison q si et seulement si pour tout entier naturel $n, u_n = u_0 q^n$.

▪ **Exemple 1.1.** La suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathrm{N}$ par $u_{n+1} = u_n + 2$, est d'après la définition une suite arithmétique de raison $r = 2$. D'après la propriété, pour tout $n \in \mathrm{N}$ on a : $u_n = 3 + 2n$.

La suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathrm{N}$ par $v_{n+1} = 2 \times v_n$, est d'après la définition une suite géométrique de raison $q = 2$. D'après la propriété, pour tout $n \in \mathrm{N}$ on a : $v_n = 3 \times 2^n$.

▪

Propriété 1.2. La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 1.3. La somme des n premières puissances d'un entier q tel que $q \neq 0$ et $q \neq 1$ est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

II. Le raisonnement par récurrence

L'idée du raisonnement est la suivante : Imaginez une suite (infinie) de dominos placés les un à la suite des autres. On appelle $\mathrm{P}(n)$ la propriété, le domino numéro n tombe. On se demande si tous les dominos vérifient cette propriété. On doit tout d'abord vérifier que premier tombe. On parle **d'initialisation**.
Ensuite il faut vérifier que **si** un domino quelconque n tombe **alors** le domino $n+1$ tombera aussi. On parle **d'hérédité**

Finalement si on sait que le premier domino tombe et qu'à chaque rang si un domino tombe alors le suivant tombe aussi, on pourra conclure que tous les dominos tombent.

Formalisons cette idée :

Propriété 1.4. Principe du raisonnement par récurrence
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P}(n)$, une propriété définie pour tout entier $n \geq n_0$. On suppose que :
• $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie. (Initialisation)
• Pour tout entier $n \geq n_0$, si $\mathrm{P}(n)$ est vraie alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie. (On dit que la propriété est héréditaire à partir du rang n_0).
alors la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Remarques : Le rang n_0 est le rang à partir duquel la propriété est vraie. Il est fréquent que $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. Mais il arrive qu'une propriété qui ne soit vraie qu'à partir d'un rang plus grand.

Attention de bien comprendre la différence entre le deuxième point et la conclusion de la propriété. Dans le second point, on **suppose** que $\mathrm{P}(n)$ est vraie, et on veut démontrer qu'alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie aussi. Dans la conclusion, on conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Point méthode :
On veut démontrer par récurrence qu'une propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On rédige en trois étapes :

• Initialisation
On vérifie que la propriété est vraie pour n_0

• Hérédité
Soit $n \geq n_0$, on **suppose** que $\mathrm{P}(n)$ est vraie. On appelle cela **l'hypothèse de récurrence.**
Ensuite on démontre que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

• Conclusion
On conclut : "La propriété est vraie au rang n_0 et héréditaire à partir de ce rang, par récurrence on conclut que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$"
On peut aussi dire plus simplement :
"Par récurrence,la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$"

■ **Exemple 1.2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
Première étape, bien déterminer la propriété $\mathrm{P}(n)$ que l'on souhaite démontrer. Ici, il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathrm{P}(n)$ = "$4^n - 1$ est un multiple de 3". On veut montrer cette propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $n_0 = 0$

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
Comme $3 \times 0 = 0$, 0 est bien un multiple de 3, on en déduit que $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité**

On formule l'hypothèse de récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $4^n - 1$ est un multiple de 3. C'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4^n - 1 = 3 \times k$.

On démontre que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = (3+1) \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 1 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1$
D'après l'hypothèse de récurrence $4^n - 1 = 3 \times k$, en remplaçant dans l'égalité ci-dessus on en déduit que :

$$4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 3 \times k = 3 \times (4^n + k)$$

$4^n + k$ étant un entier on en déduit que $3 \times (4^n + k)$ est un multiple de 3, donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.
On a montré que si $\mathrm{P}(n)$ est vraie alors $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie. Autrement dit $\mathrm{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 0.

- Conclusion

$\mathrm{P}(0)$ est vraie et pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{P}(n)$ est héréditaire à partir de $n = 0$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

■

■ **Exemple 1.3.** Soit a un nombre réel positif. On appelle **inégalité de Bernoulli** :
$\mathrm{P}(n) : (1+a)^n \geq 1 + na$. Montrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathrm{N}^*$.
Démonstration au programme

- **Initialisation**

Ici $n_0 = 1$. D'une part $(1+a)^1 = a + 1$, d'autre part, $1 + 1 \times a = 1 + a$.
On en déduit que $(1+a)^1 \geq 1 + 1 \times a$, et donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie :

$(1+a)^{n+1} = (1+a) \times (1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$ (d'après l'hypothèse de récurrence.)

Or, $(1+a)(1+na) = 1 + na + a + a \times na = 1 + a \times (n+1) + na^2$

n étant un entier naturel et a^2 un nombre positif, on en déduit que : $na^2 \geq 0$.

En ajoutant $1 + a(n+1)$ de part et d'autre de cette inégalité on obtient :

$1 + a \times (n+1) + na^2 \geq 1 + a(n+1)$.

Finalement en regroupant les différentes inégalités on obtient :

$(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+na) \geq 1 + a(n+1)$.

On a montré que $(1+a)^{n+1} \geq 1 + a(n+1)$. Donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion**

$\mathrm{P}(1)$ est vraie et pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{P}(n)$ est héréditaire à partir de $n = 1$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

■

Remarque : Dans un raisonnement par récurrence, l'hypothèse de récurrence doit nécessairement être utilisée. Cela doit d'ailleurs guider la démonstration de l'hérédité. Si elle n'est pas utile cela signifie qu'il ne s'agit pas d'un raisonnement par récurrence.

■ **Exemple 1.4. Une étude classique.**

Soit (u_n), la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 4u_n - 5$. Démontrons par récurrence que (u_n) est croissante.

(u_n) croissante signifie que pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} \geq u_n$. On pose donc pour $n \in \mathbb{N}$

$\mathrm{P}(n) : u_{n+1} \geq u_n$

- **Initialisation**

On calcule u_1 : $u_1 = 4 \times u_0 - 5 = 4 \times 3 - 5 = 7$

On a $u_1 \geq u_0$, la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $u_{n+1} \geq u_n$. On montre que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$u_{n+1} \geq u_n$ on multiplie par 4 de part et d'autre de l'inégalité :

$4u_{n+1} \geq 4u_n$ on soustrait 5 de part et d'autre de l'inégalité :

$4u_{n+1} - 5 \geq 4u_n - 5$ on retrouve l'expression de (u_n) :

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Cette dernière inégalité correspond à $\mathrm{P}(n+1)$ qui est donc vraie.

• **Conclusion**

Par récurrence, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, c'est à dire que la suite (u_n) est croissante. ▪

Exercices non à soumettre

■ **Exercice 1.1.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$ par $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$.

1. Calculer les termes jusqu'à u_4.
2. Montrer que pour tout $n \geq 7$, $u_n \leq 3^n$

■

■ **Exercice 1.2. Montrer la monotonie d'une suite par récurrence.**

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 4u_n + 2$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $v_{n+1} = 3v_n - 6$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

■

■ **Exercice 1.3. Démontrer un encadrement par récurrence**

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0, -2 \leq u_n \leq 2$.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$ par $v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0, 0 \leq v_n \leq 3$.

■

■ **Exercice 1.4.** Montrer par récurrence les résultats suivants. Notez que chaque question est un exercice en soi. Répartissez les sur plusieurs jours.

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + 2n + 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq n^2$

2. Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Somme des termes d'une suite géométrique de raison q pour, $q \neq 1$, $q \neq 0$ et tout $n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

4. Pour tout $n \geq 0$, $2^{n+4}+3^{3n+2}$ est divisible par 5.

5. Pour tout $n \geq 5$, $2^n > n^2$

6. Pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+2^2+3^2+\dots..+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

■

■ Exercice 1.5. Bac 2019

Au 1^er janvier 2018, un arboriculteur possède 5000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1^er janvier de l'année $(2018+n)$.

1. Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0,96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.
2. Calculer u_1 et u_2. Combien de pommiers possédera l'arboriculteur au 1^er janvier 2020 ?
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0,96^n$.

■

■ **Exercice 1.6. Bac 2019**

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidæ, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardèche donne les estimations suivantes :

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	181	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : *Modèle 1*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2. Arrondir à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
4. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : *Modèle 2*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que :

$$v_0 = 97 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = 0,91v_n + 93.$$

1. On admet que, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{3}\left(-2809 \times 0,91^n + 3100\right)$.
   Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.
2. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est croissante.

■