LE CHOIX
D'UNE AUTRE
SCOLARITÉ

MATHÉMATIQUES

Classe de Première

-Premier trimestre-

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

76/78 rue Saint Lazare – 75009 Paris
www.eib-adistance.com

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

©EIB à distance – Septembre 2020
Toute reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. (loi du 11 mars 1957)

Séquence 1
Tool Box : Discriminant et Dérivation

Cette semaine nous allons aborder deux notions calculatoires importantes : le discriminant et la dérivation. Le premier est un outil important de factorisation (la factorisation est la transformation d'une addition en multiplication). La seconde, comme dit l'adage "Dérivation rime avec Variation et Variation rime avec Dérivation", est un outil pour connaître les variations d'une fonction. Vous aurez des exercices qui utilisent ces notions TOUTE l'année.

I. Discriminant

1. Le Théorème

Les fonctions polynômes $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$) sont difficilement factorisables avec les outils de Seconde. Cependant, pour trouver le signe de telles fonctions il nous faut une forme factorisée. Pour cela, on introduit un nouvel outil : le Discriminant.

Définition 1.1.
Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le Discriminant de P est le nombre suivant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Théorème 1.1.
Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$. Alors

— Si $\Delta > 0$ on peut factoriser P en :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— Si $\Delta = 0$ on peut factoriser P suivant une identité remarquable :

$$P(x) = a\left(x - \overline{x}\right)^2 \text{ avec}$$

$$\overline{x} = \frac{-b}{2a}$$

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

— Si $\Delta < 0$ on ne peut pas factoriser P et P **est de signe constant** (du signe de a ou c).

Démonstration. Cette preuve est admise. ■

2. Les Exemples d'application

■ **Exemple 1.1.**
Cherchons à résoudre : $x^2 - 3x + 4 \geq 0$

On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$. Donc $x^2 - 3x + 4$ est de signe constant. Pour connaître le signe, on remplace x par 0 (on appelle cela "évaluer")
Or évalué en 0 (*i.e.* en prenant $x = 0$), $x^2 - 3x + 4$ vaut $4 > 0$. Donc $x^2 - 3x + 4$ est toujours positif, et $x^2 - 3x + 4 \geq 0$ est toujours vrai. L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$ ■

■ **Exemple 1.2.**
Cherchons à résoudre maintenant :

$$2x^2 + 4x - 30 \leq 0$$

On calcule le discriminant de P : $x \mapsto 2x^2 + 4x - 30$. On a $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-30) = 256 = 16^2$.
Donc P se factorise en :

$$\mathrm{P}(x) = 2\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

où

$$x_1 = \frac{-4-16}{2 \times 2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-4+16}{2 \times 2} = 3$$

Donc on a :

$$\mathrm{P}(x) = 2(x+5)(x-3)$$

Maintenant que P est factorisé, cherchons le signe de P (en faisant un tableau de signe).
On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{P}(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est donc : $\mathscr{S} = [-5, 3]$.

■

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

■ **Exemple 1.3.**

On considère maintenant le trinôme P : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$ et $a > 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Donc P se factorise en :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On obtient le tableau de signe de P suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

■

II. Dérivation

1. Le concept et l'utilisation

Pour trouver le sens de variation d'une fonction on introduit un outil : la Dérivation. Pour une fonction f, on calcule via des formules (à maîtriser comme vous maîtrisez les additions) une fonction dérivée f' qui permet de donner le sens de variation de la fonction grâce au théorème suivant.

Théorème 1.2.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit f' la fonction dérivée de f sur I. Soit J un intervalle de I. On a :
— Si $f' > 0$ sur J alors f est strictement croissante sur J.
— Si $f' < 0$ sur J alors f est strictement décroissante sur J.
— Si $f' = 0$ sur J alors f est constante sur J.

2. Comment calculer une dérivée ?

Pour calculer des fonctions dérivées on a deux jeux de formules :
— Voici le premier jeu de formules, à noter que x n'est QUE la variable x. On ne peut PAS utiliser ces formules en remplaçant x par x^2 par exemple. (e^x est la fonction exponentielle que vous verrez la semaine prochaine).

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

f	f'
$c \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x

— Pour pouvoir remplacer x par autre terme, on utilise le deuxième jeu de formules suivant. Ce jeu de formules est TRÈS utile.
On notera u, v deux fonctions et g une troisième fonction.

f	f'	Remarques
$u+v$	$u'+v'$	*les dérivées et les + sont amies*
$k\,u$	$k\,u'$	k est une constante.
$u \times v$	$u'\,v+v'\,u$	*les dérivées et les × NE sont PAS amies*
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$	il faut que $u \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\,v-v'\,u}{v^2}$	il faut que $v \neq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u = ax+b$ et $u>0$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$	$u = ax+b$
e^u	$u'e^u$	$u = ax+b$
$g(ax+b)$	$ag'(ax+b)$	$a, b \in \mathbb{R}$

R

Les remarques $u = ax+b$ sont juste pour le programme de Première. Les formules marchent quand même, même si u n'est pas égale à $ax+b$. Je vous recommande d'apprendre les formules dans le cas général.

■ **Exemple 1.4.**
Dérivons des fonctions de plus en plus complexes :

1. Pour $f : x \mapsto 2x$: f est de la forme $k\,u$ avec $u = x$. Donc $u' = 1$ et $f'(x) = k\,u' = 2 \times 1 = 2$
2. Pour $f : x \mapsto x^2+4x+3$: f est une somme de fonctions. Donc on va dériver chaque membre séparément et les additionner pour avoir la dérivée de f. La dérivée de x^2 est $2x$, la dérivée de $4x$ est 4 et la dérivée de 3 est 0 (car 3 est une constante). Donc $f'(x) = 2x+4+0 = 2x+4$
3. Pour $f : x \mapsto (3x+2)^{15}$: f est de la forme u^{15} avec $u = 3x+2$. Donc $u' = 3$ et $f'(x) = 15 \times 3 \times (3x+2)^{14}$.
4. Pour $f : x \mapsto \frac{2x^3+3}{4x^2+x+3}$: f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = 2x^3+3$ et $v = 4x^2+x+3$. On a $u' = 6x^2+0$ et $v' = 8x+1$. Donc
$$f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} = \frac{6x^2(4x^2+x+3)-(8x+1)(2x^3+3)}{(4x^2+x+3)^2} = \frac{8x^4+4x^3+18x^2-24x-3}{(4x^2+x+3)^2}$$
Attention : On ne développe jamais le dénominateur! En effet on cherche le signe de la dérivée et le dénominateur a déjà une forme dont on connait le signe (c'est un carré donc le dénominateur est positif).

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

5. Pour $f : x \mapsto x\sqrt{x}$: f est de la forme $u \times v$ avec $u = x$ et $v = \sqrt{x}$. Donc $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc on obtient :

$$f'(x) = u'\,v + v'\,u = 1\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,x.$$

Comme ce qui nous intéresse dans la dérivée c'est son signe, il faudra mettre sous le même dénominateur cette fonction dérivée f'. On obtient :

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

6. Pour $f : x \mapsto (3x^2+4)\sqrt{2x+7}$: f a la forme $u \times v$ avec $u = 3x^2+4$ et $v = \sqrt{2x+7}$[1]. Donc $u' = 6x$ et $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x+7}} = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}$. On obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + v'u \\ &= 6x\sqrt{2x+7} + \frac{1}{\sqrt{2x+7}}(3x^2+4) \\ &= \frac{6x(2x+7)+3x^2+4}{\sqrt{2x+7}} \\ &= \frac{15x^2+42x+4}{\sqrt{2x+7}} \end{aligned}$$

■

3. Tableaux de Variation

Pour trouver les variations d'une fonction on réalise un tableau de variations.
Les étapes pour faire un tableau de de la fonction f sont les suivantes :

1. Trouver le domaine de Définition de la fonction f noté $\mathscr{D}_f$.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Trouver le signe de la dérivée de f sur LE DOMAINE DE DÉFINITION de f[2]
4. Donner les variations de f.

■ **Exemple 1.5.**
Cherchons les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + \pi$.

1. f est une fonction sans racine carré, ni fraction. Donc son domaine de définition est $\mathbb{R}$.
2. Calculons f'. On a :

$$f'(x) = 2x^2 + 5x + 2 + 0$$

3. Cherchons le signe de f'. f' est un polynôme du second degré comme vu en partie I.. Donc pour trouver son signe il va falloir le factoriser. L'outil de factorisation de ce type de polynôme est le discriminant.
$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 = 3^2$ et $f'(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a = 2$, $x_1 = \frac{-5-3}{2\times 2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1}{2}$. Donc $f'(x) = 2(x+2)(x+1/2)$ et on obtient le tableau de signe suivant :

1. Dans ce cas là, il faudrait avant toute chose chercher le domaine de définition de f. Ici c'est $[-\frac{7}{2}, +\infty[$
2. Plus tard ce sera sur le domaine de dérivation de f qui sera presque $\mathscr{D}_f$

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Maintenant, avec le signe de cette dérivée donnons le sens de variation de la fonction. Chaque "+" de la dérivée correspond à un domaine où la fonction est strictement croissante et chaque "-" à un domaine où elle est strictement décroissante. A chaque fois que la fonction change de variation on mettra la valeur de la fonction. On obtient donc le tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

■

R Cette compétence de dérivation est essentielle pour la poursuite de vos études en Sciences (pas qu'en Mathématiques). Aussi, tout le long de l'année et dans tous les devoirs vous aurez des exercices de Tableau de Variation à faire (les corrections seront de moins en moins détaillées). De plus, vous aurez assez souvent des exercices d'inéquations sur lesquels il faut s'entraîner.

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

Exercices non à soumettre

Extrait de cours Spécialité Mathématiques Première

■ Exercice 1.1.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 5x + 3 > 0$
2. $\left(\frac{2x^2-12x+19}{x-2}\right) \leq 0$
3. $\left(\frac{-6x^2-9x-3}{-x^2+8x-17}\right) > 0$

■ Exercice 1.2.

Donner les variations de la fonction : $f : x \longmapsto \frac{x+7}{3x+2}$.

■ Exercice 1.3.

Donner les variations de la fonction : $f : x \longmapsto \sqrt{\pi} \times (x+3)$.

■ Exercice 1.4.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{4x+7}{6x+4} \geq \frac{\sqrt{15}}{6}$$

■ Exercice 1.5.

Donner les variation de la fonction $f : x \longmapsto 3x \times \sqrt{2x+7}$

■ Exercice 1.6.

Résoudre l'inéquation : $3x^2 + 2x + 7 \geq 0$

■ Exercice 1.7.

Donner les variations de la fonction : $f : x \longmapsto \sqrt{2x^2 + 8x + 32}$