Semaine 3

Chapitre 2 : Les nombres décimaux

7. Quotients ; définition d'un décimal

❶ 99 ÷ 36

9	9			36
2	7	0		2,75
	1	8	0	
			0	

❷ 43 ÷ 7

4	3							7
	1	0						6,142857
		3	0					
			2	0				
				6	0			
					4	0		
						5	0	
							1	

Le même nombre 1 réapparaissant au reste, le même cycle de calculs et de nombres va se répéter infiniment.

Il y a deux types de quotients :
❶ Écriture finie : nombre décimal
❷ Écriture infinie : nombre non-décimal

Définitions

Un **nombre décimal** est un nombre que l'on peut écrire car son **écriture décimale** est finie.

Un nombre dont l'écriture est infinie n'est pas décimal.

Un nombre décimal pourra toujours être considéré comme en entier dans l'unité qui convient.
En particulier, les nombres entiers sont des nombres décimaux.
Par exemple : 0,12 est 12 centièmes ; 54,167 est 54 167 millièmes.

Tout nombre décimal pourra s'écrire comme quotient d'un nombre entier par une puissance de 10. (**fraction décimale**)

Par exemple : $0{,}12 = 12 \text{ centièmes} = \frac{12}{100}$; $54{,}167 = 54\,167 \text{ millièmes} = \frac{54\,167}{1\,000}$

Un nombre non décimal obtenu comme quotient de deux nombres entiers a une écriture périodique. La période de ce nombre est le groupe de chiffres qui se répètent infiniment dans son écriture.

Par exemple :
Le nombre : 15,142142142142… a une période de 3 chiffres : 142
Le nombre : 37,469546954695… a une période de 4 chiffres : 4695

Arrondi ou encadrement

Quand une division ne s'arrête pas, il faut faire un choix pour la présentation du « résultat ».
Le **seul résultat exact** sera toujours l'écriture en ligne de la forme D = d × q + r.
Mais, selon les situations, différentes présentations de résultats approchés sont possibles : on peut tronquer, encadrer ou arrondir la valeur du quotient.

Pour tronquer un résultat : on « coupe » au rang indiqué et on « laisse tomber » les chiffres à droite de la coupure. On obtient ainsi la **troncature** du nombre.

Pour arrondir un résultat : on tronque d'abord le nombre au rang indiqué puis :
• Si le chiffre qui suit est supérieur ou égal à 5 alors on augmente de 1 le dernier chiffre de la troncature ;
• Si le chiffre qui suit est inférieur à 5 alors on garde la troncature.

Exemple : Pour le nombre 2,**536**536536… :

	troncature		arrondi
à l'unité	2	après le 2, il y a un 5, donc	3
au dixième	2,5	après le 5, il y a un 3, donc	2,5
au centième	2,53	après le 3, il y a un 6, donc	2,54

Pour encadrer un quotient : le quotient est encadré par sa troncature et par le nombre obtenu en ajoutant 1 au dernier chiffre de sa troncature.

Exemple : Pour le quotient de 43 par 7 calculé plus haut :

	troncature	encadrement
à l'unité	6	$6 < q < 7$
au dixième	6,1	$6,1 < q < 6,2$
au centième	6,14	$6,14 < q < 6,15$

Les différentes étapes du calcul du quotient

Effectuer une division se fera toujours selon les trois étapes suivantes :

1) Calcul de l'ordre de grandeur pour déterminer la position de la virgule dans le quotient

2) Calcul du quotient des nombres débarrassés de leur virgule éventuelle

3) Choix de la présentation du résultat.

Dans les leçons suivantes, sont rappelées les méthodes pour :
- les calculs d'ordre de grandeur
- le calcul du quotient

Exercices d'application page suivante.

Exercices

Exercice 69

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?

3,5 ; 5,417 ; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$; 12 ; $45 \div 7$

Exercice 70

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$\frac{5}{100}$ $\frac{1\,875}{1\,000}$ $\frac{7}{10^4}$ $\frac{653}{10^2}$

$\frac{895\,462}{10^5}$ $\frac{9\,350}{10}$

Exercice 71

Mettre les nombres décimaux suivants sous la forme d'un quotient dont le diviseur est une puissance de 10

12,1 ; 74,52 ; 0,524 ; 0,005 ;128

Exercice 72

Si un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^5}$ (où a est un entier qui n'est pas multiple de 10), combien aura-t-il de chiffres après la virgule ?

Vérifier en écrivant les nombres $\frac{348}{10^5}$ et $\frac{4\,578\,621}{10^5}$ avec une virgule.

Exercice 73

Compléter les pointillés avec des puissances de 2 ou de 5 :

$5^3 \times \ldots = 10^3$ $2^4 \times \ldots = 10^4$ $5^2 \times 2^5 \times \ldots = 10^{\ldots}$

Exercice 74

Donner l'écriture décimale des nombres suivants :

$\frac{17}{2^2}$ $\frac{23}{5^4}$ $\frac{27}{2^3 \times 3}$ $\frac{1}{2^5}$ $\frac{7}{2^7 \times 5^4}$

Exercice 75

Les nombres suivants : $\frac{52}{2}$; $\frac{25}{8}$; $\frac{57}{32}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$ sont-ils des nombres décimaux ? Pour le déterminer, essayer de mettre ces nombres sous la forme $\frac{a}{10^n}$ et, dans ce cas, préciser les valeurs de a de n.

Exercice 76

1) Quels sont les arrondis à l'unité, au dixième et au centième du nombre 1,73205 ?
2) Quels sont les arrondis à l'unité, au dixième et au centième du nombre 3,0507.

Exercice 77

Arrondir à l'unité les nombres suivants :
32,45 ; 133,67 ; 15 000,000 1 ; 1 346 ; 0,999 ; 0,099 9 ;
5,51 ; 5,451.

Exercice 78

Arrondir au dixième les nombres suivants :
3,141 592 6 ; 3,51 ; 3,93 ; 3,99.

Exercice 79

Arrondir au centième les nombres suivants :
3,141 592 6 ; 2,164 ; 2,1 ; 2,166.

Exercice 80

Donner un nombre décimal dont la troncature au dixième est égale à l'arrondi au dixième et dont la troncature au centième n'est pas égale à l'arrondi au centième.

Exercice 81

Après avoir posé les divisions, donner les arrondis à l'unité, au dixième et au centième des quotients : 413 ÷ 3 ; 192 ÷ 77 ; 290 ÷ 54

Exercice 82

Expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir 10 chiffres dans la période de $\frac{1}{7}$

Exercice 83

Quel est le 37e chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du nombre $\frac{1}{7}$?

Exercice 84

Quel est le 135e chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du quotient 779 ÷ 513 ?

Exercice 85

Soit n le nombre dont l'écriture est infinie et périodique : 4,**607**607607….
Calculer 1 000 × n ; en déduire 999 × n.
Quels sont les deux entiers dont n est l'écriture du quotient ?

Exercice 86

En prenant modèle sur l'exercice précédent, montrer que les nombres à écriture périodique infinie suivants sont des quotients d'entiers à déterminer :
a : 56,**248**248248…
b : 3,**1395**1395…

8. Ordre de grandeur d'un quotient

Ordre de grandeur (OG) d'un nombre

a) Si le nombre est plus grand que 1

On ne garde que les chiffres avant la virgule. (la partie entière)

On garde le premier chiffre et on remplace tous les autres par des 0.
On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.

On ajoute 1 au premier chiffre.
On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.

Les deux nombres obtenus encadrent le nombre de départ. On dit que le nombre de départ est « compris entre » ces deux nombres.

On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.

Exemple 1 : 6 854,17

On ne garde que la partie entière → 6 854
On garde le premier chiffre et on remplace tous les autres par des 0 → 6 000
On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.
On ajoute 1 au premier chiffre → 7 000
On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.
Le nombre de départ est « compris entre » ces deux nombres.
6 000 < 6 854,17 < 7 000
On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.
OG(6 854,17) = 7 000

Exemple 2 : 12 361 024

10 000 000 < 12 361 024 < 20 000 000 ; OG(12 361 024) = 10 000 000

b) Si le nombre est compris entre 0 et 1.

C'est un nombre dont l'écriture commence par : "0,"

Exemple : 0,0367
On garde le premier chiffre autre que 0, et on retire tous ceux qui le suivent.
0,03
On obtient ainsi un premier nombre qui est plus petit que le nombre de départ.
On ajoute 1 à ce premier chiffre différent de 0.
0,04

On obtient ainsi un deuxième nombre qui est plus grand que le nombre de départ.
0,03 < 0,0367 < 0,04
On choisit comme OG du nombre de départ celui des deux qui lui est le plus proche.
OG(0,0367) = 0,04

0,009 < 0,00973 < 0,010 donc OG(0,00973) = 0,01

0,6 < 0,6024 < 0,7 donc OG(0,6024) = 0,6

Ordre de grandeur du produit

Pour calculer l'OG d'un produit, on remplace chacun des facteurs par leur OG, puis on effectue le produit de ces OG de la manière suivante :
Pour calculer l'OG de 672,35 × 98,026 :
OG de 672,35 : 700 OG de 98,026 : 100
OG du produit : 700 × 100 = 7 × 100 × 100 = 7 × 10 000 = 70 000

Pour calculer l'OG de 62,35 × 34 512 :
OG de 62,35 : 60 OG de 34 512: 30 000
OG du produit : 60 × 30 000 = 6 × 3 × 10 × 10 000 = 18 × 100 000 = 1 800 000

Pour calculer l'OG de 0,0235 × 675,2 :
OG de 0,0235 : 0,02 OG de 675,2 : 700
OG du produit : 0,02 × 700 = 2 × 7 × 0,01 × 100 = 14 × 1 = 14

Le calcul de l'OG ne cherche pas à obtenir un résultat le plus proche du résultat exact. Il s'agit de connaître la « taille » d'un nombre, c'est-à-dire le nombre de chiffres avant la virgule ou bien la position du premier chiffre non nul après la virgule.

Le calcul de l'OG doit être fait de tête en moins de 5 secondes.

Ordre de grandeur d'un quotient

Le calcul de l'OG doit être simple et rapide (de tête). Les calculs que l'on sera amené à faire doivent donc être immédiats. On choisira donc toujours en premier l'OG du diviseur, puis on choisira pour le dividende, un OG qui permet un calcul pour lequel les tables de multiplication suffisent.

Par exemple, pour calculer l'OG de $\frac{992}{293}$, on choisira de calculer $\frac{990}{300}$ (qui donne 3,3 par une division simple) plutôt que $\frac{1\,000}{300}$ qui ne donne pas un résultat exact rapidement.

Donc, on respecte la règle du choix de l'OG pour le diviseur, et on essaye de s'adapter pour le choix de l'OG du dividende.

Pour : $\frac{3\,129}{791}$ on prendra $\frac{3\,200}{800}$; Pour $\frac{41\,734}{57}$: $\frac{42\,000}{60}$; Pour $\frac{65\,291\,306}{692}$: $\frac{70\,000\,000}{700}$

Ordre de grandeur et position de la virgule

Le calcul de l'ordre de grandeur permet dans la grande majorité des cas de connaître la position de la virgule, tant dans les produits que dans les quotients.
672,35 × 98,026 : OG du produit : 70 000. Le produit aura 5 chiffres avant la virgule, et le premier chiffre sera sans doute un 7 ou un 6.
0,561 × 0,00869 : OG du produit : 0,0054. Le premier chiffre différent de zéro sera à la troisième place après la virgule.
$\frac{0,356}{0,0024}$: OG du quotient 200. Le quotient aura 3 chiffres avant la virgule.
$\frac{0,0328}{0,463}$: OG du quotient 0,06. Le premier chiffre autre que 0 sera en deuxième place après la virgule.

Cas particuliers : quand l’OG est une puissance de 10.

Voici deux quotients $A = \frac{42,34}{4\,428,9}$ et $B = \frac{0,0781}{7,617}$

Les calculs des OG : pour A : $\frac{40}{4\,000} = 0,01$ pour B : $\frac{0,08}{8} = 0,01$

Les deux quotients ont le même ordre de grandeur, mais les résultats des divisions vont différer sur un point essentiel : la position du premier chiffre avant la virgule.
En effet, par le calcul on obtient au cent millième : $A \approx 0,00956$ et $B \approx 0,01025$
Ces deux résultats sont donc très proches de un centième mais dans un cas le premier chiffre est le troisième après la virgule, dans l’autre c’est le deuxième.
On prendra le temps de prévoir cela (**quand l’OG est une puissance de 10**) en comparant OG × d à D :

Pour $A = \frac{42,34}{4\,428,9}$: OG × d = 0,01 × 4 428,9 = 44,289 et D = 42,34

OG × d > D donc A < OG.
Pour dire les choses simplement : Dans 42,34 il y a moins d’un centième de 4 428,9 donc le quotient est inférieur à 0,01.
Au contraire, pour B, dans 0,0781 il y a plus d’un centième de 7,617 donc B est plus grand que 0,01.
D’autres exemples

$\frac{347,93}{29\,428,9}$ OG : $\frac{300}{30\,000} = 0,01$ position de la virgule : 0,0• car 0,01 × d < D

$\frac{10,34}{11\,358}$ OG : $\frac{10}{10\,000} = 0,001$ pos de la virg : 0,000• car 0,001 × d > D

$\frac{406,307}{0,398}$ OG : $\frac{400}{0,4} = 1\,000$ pos de la virg : •000, car 1 000 × d < D

Exercices

Exercice 87

Classer les quotients suivants par ordre croissant après avoir seulement montré le calcul de l'ordre de grandeur :
a = 10 894 ÷ 534,08
b = 182,95 ÷ 93,53
c = 82,11 ÷ 0,416

Exercice 88

Une entreprise doit rénover son parc informatique. Il faut remplacer 387 ordinateurs.
Donner un ordre de grandeur de la dépense à prévoir pour les trois options suivantes :
Option A : 494,95 € pièce
Option B : 599 € pièce
Option C : 749,50 € pièce

Exercice 89

Un conseil municipal décide d'équiper sa commune de colonnes d'éclairage. Le coût de chaque colonne est (tous frais compris) de 878,80 €.
Donner un ordre de grandeur du nombre de colonnes que l'on peut commander en disposant d'un budget de 72 680 €

Exercice 90

Donner l'OG des nombres suivants :

39,213	578,03	1 234 620	97 546,8	34,29
0,00264	0,008769	0,951	0,6357	0,000088

Exercice 91

Calculer les OG des produits suivants :

6 547 × 32,59	361,7 × 0,074
44 318 × 318,095	0,0067 × 645,18
0,0287 × 0,643	0,014 × 16 357
942 × 994	66 854 × 0,0124
284,35 × 651 321	0,00684 × 0,793

Exercice 92

Calculer l'OG des quotients suivants :

Le dividende est plus grand que le diviseur, et ils sont tous les deux plus grands que 1

$\frac{3\,129}{791}$	$\frac{542\,123}{84{,}61}$	$\frac{68\,754}{942}$
$\frac{6\,574{,}2}{76{,}24}$	$\frac{321\,045{,}19}{54{,}34}$	$\frac{678}{459}$
$\frac{547\,031{,}9}{426{,}49}$	$\frac{85\,640}{55\,841}$	$\frac{321\,085}{41{,}2301}$

Exercice 93

Calculer l'OG des quotients suivants :
Le dividende est plus grand que le diviseur, et ils sont tous les deux plus petits que 1

$\frac{0{,}235}{0{,}1087}$	$\frac{0{,}356}{0{,}0024}$	$\frac{0{,}00684}{0{,}0000587}$	$\frac{0{,}965}{0{,}004762}$
$\frac{0{,}0106}{0{,}00975}$	$\frac{0{,}03419}{0{,}000774}$	$\frac{0{,}0003951}{0{,}00000846}$	$\frac{0{,}698}{0{,}000831}$

Exercice 94

Calculer l'OG des quotients suivants :
Le dividende est plus petit que le diviseur, et ils sont tous les deux plus grands que 1

$\frac{542}{3\,568}$	$\frac{68{,}014}{64\,987{,}21}$	$\frac{994}{77\,854{,}34}$
$\frac{2\,457}{68\,214\,736}$	$\frac{12}{68\,442}$	$\frac{661}{32\,548}$

Exercice 95

Calculer l'OG des quotients suivants :
Le dividende est plus petit que le diviseur, et ils sont tous les deux plus petits que 1

$\frac{0{,}0328}{0{,}463}$	$\frac{0{,}000564}{0{,}879}$	$\frac{0{,}00121}{0{,}674}$	$\frac{0{,}00008951}{0{,}00035}$	$\frac{0{,}0003341}{0{,}0954}$