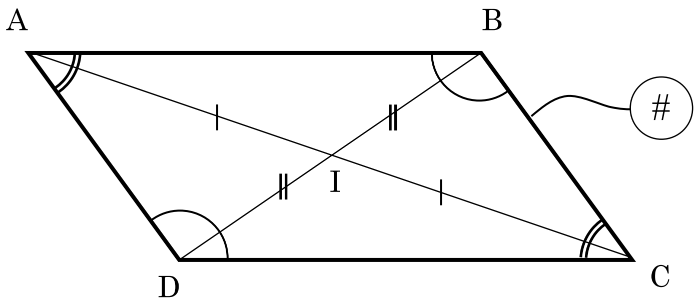
4 Les parallélogrammes

Définition et propriétés

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a un centre de symétrie. Le centre de symétrie est appelé le centre du parallélogramme.



Propriétés du parallélogramme

- côtés parallèles deux à deux :
  (AB) // (CD) et (AD) // (BC)
- côtés deux à deux de même longueur :
  AB = CD et AD = BC
- angles consécutifs supplémentaires :
  $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = \widehat{ADC} + \widehat{DCB} = \widehat{DCB} + \widehat{CBA} = \widehat{CBA} + \widehat{BAD} = 180°$
- angles opposés égaux deux à deux :
  $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{ADC}$
- diagonales de même milieu
  I est le milieu de [AC] et de [BD].

Toutes ces propriétés sont des **conditions nécessaires** au parallélogramme. Qu'une seule de ces propriétés ne soit pas vérifiée est une preuve que le quadrilatère n'est pas un parallélogramme.

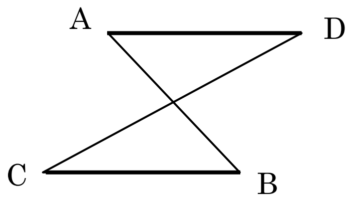
Conditions suffisantes pour un parallélogramme

- Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.

Chacune de ces trois propriétés est **suffisante** pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

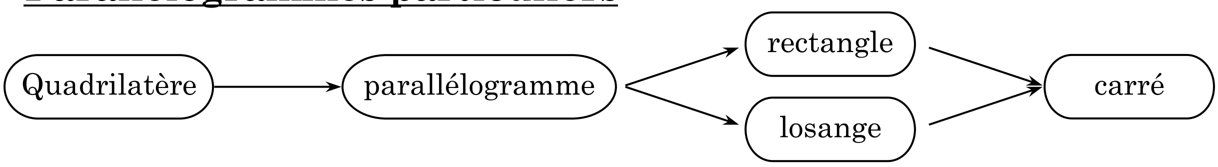
En revanche, les deux propriétés suivantes ne sont **pas suffisantes** :

- Si un quadrilatère a deux côtés parallèles et égaux, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses côtés égaux deux à deux, alors c'est un parallélogramme.



On voit sur ce dessin que les conditions proposées n'interdisent pas cette possibilité. Il faudrait, pour avoir un parallélogramme, que le quadrilatère ne soit pas « croisé ».

Parallélogrammes particuliers



Sans revenir en détail sur ce qui a été étudié en classe de cinquième, voici une liste de propriétés permettant de montrer la nature des parallélogrammes particuliers. Ce sont les principales, on pourrait en trouver d'autres.

Rectangle

R1 : Si un quadrilatère a trois angles droits, …
R2 : Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur et de même milieu, …
R3 : Si un parallélogramme a un angle droit, …
R4 : Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur , …
alors, dans chacun de ces cas, c'est un rectangle.

Losange

L1 : Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, …
L2 : Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et de même milieu, …
L3 : Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, …
L4 : Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, …
alors, dans chacun de ces cas, c'est un losange.

Carré

Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors c'est un carré.
Il suffit donc de combiner les propriétés énoncées ci-dessus.

Exercices

Exercice 36

Associer des données, une propriété et une conclusion pour former un enchaînement logique correct. Tout ne sera peut-être pas utilisé.

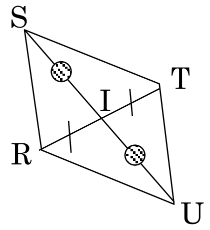
	Données		Propriété		Conclusion
1	A et B sont symétriques par rapport à O D et C sont symétriques par rapport à O	1	**Si** deux droites sont parallèles **alors** toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.	1	(AB) // (EF)
2	SEPT est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en O	2	**Si** un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses diagonales se coupent en leur milieu.	2	SEPT est un parallélogramm e
3	ABCD et EFCD sont tous les deux des parallélogrammes et AB = 5 cm	3	**Si** deux points sont symétriques par rapport à O **alors** O est le milieu du segment formé par ces deux points.	3	O est le milieu de [SP] et O est le milieu de [ET]
4	AB = ET et BE = TA	4	**Si** un point est le centre d'un cercle **alors** c'est le milieu de tout diamètre de ce cercle.	4	(DE) // (CF) et (DC) // (EF)
5	[AB] diamètre de (C_1) [CD] diamètre de (C_2)	5	**Si** un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu **alors** c'est un parallélogramme.	5	ABCD est un parallélogramm e
6	O est le milieu de [AC] O est le milieu de [CB]	6	**Si** un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses cotés opposés sont parallèles.	6	ACBD est un parallélogramm e
7	(C_1) et (C_2) sont deux cercles de centre O	7	**Si** un quadrilatère a ses cotés opposés parallèles **alors** c'est un parallélogramme.	7	AB = DC = 5 cm DC = EF = 5 cm donc EF = 5 cm
8	CDEF est un parallélogramme	8	**Si** un quadrilatère est un parallélogramme **alors** ses cotés opposés sont de même longueur.	8	ACBD est un parallélogramm e
9	(AD) // (BC) (AB) // (DC)	9	**Si** un quadrilatère non croisé a ses cotés opposés 2 à 2 de même longueur **alors** c'est un parallélogramme.	9	ABET est un parallélogramm e

Exercice 37

ABCD est un parallélogramme. La parallèle à (BD) passant par A coupe (CB) en E et (CD) en F. Que peut-on dire du point A?

Exercice 38

Voici une figure codée et une démonstration. À partir de cela, faire une liste des données de ce problème, puis rédiger un énoncé de ce problème.



Montrons que RSTU est un parallélogramme

U est le symétrique de S par rapport à I, donc I est le milieu de [SU].
On sait que I est le milieu de [RT]
Donc [RT] et [SU] ont le même milieu.
Or, Si un quadrilatère a les diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc RSTU est un parallélogramme.

Exercice 39

Pour l'énoncé qui suit, la démonstration a été rédigée en dix phrases, mais ces dix phrases ont été mélangées. Il faut les remettre en ordre pour qu'elles répondent correctement à la question posée. On s'aidera d'une figure à main levée.

Énoncé : Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A coupe (BC) en H. E est le symétrique de H par rapport au milieu I de [AC].Démontrer que AHCE est un rectangle.

Les dix phrases de la démonstration :
Donc AHCE est un rectangle.
On sait que I est le milieu de [AC]
Donc l'angle AHC est droit.
On sait que E et H sont symétriques par rapport à I.
Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
Donc [HE] et [AC] se coupent en leur milieu.
Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
Donc I est le milieu de [HE].
On sait que [AH] est une hauteur du triangle de ABC.
Donc AHCE est un parallélogramme.

Exercice 40

ABC est un triangle tel que : AB = 6 cm, $\widehat{BAC} = 35°$ et $\widehat{ABC} = 45°$; $M \in [AB]$.
La parallèle à (AC) passant par M coupe [BC] en R.
La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en S.
Démontrer que les segments [RS] et [MC] ont le même milieu.

Exercice 41

ABCD est un parallélogramme. M est le milieu de [AB].
La parallèle à (MD) passant par B coupe(CD) en N.
Démontrer que N est le milieu de [CD].
Démontrer que les droites (AC), (MN) et (BD) sont concourantes.

Exercice 42

ABC est un triangle. La parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AC) passant par B se coupent en D. La parallèle à (AB) passant par C coupe (DA) en F et (DB) en E.
Expliquer et justifier une méthode qui permet d'obtenir, avec seulement la règle non graduée, les milieux de chacun des côtés du triangle ABC.

Exercice 43

ABC est un triangle équilatéral. D et E sont les symétriques respectifs de B et C par rapport à A. F est le symétrique de A par rapport à (BC).
Quelle est la nature de chacun des quadrilatères BCDE et ABFC?

Exercice 44

Étudier si les figures décrites ci-dessous sont possibles (rédiger alors le programme de construction) ou impossibles (montrer l'impossibilité).

⊇ Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur, et qui ne soit pas un trapèze.

⊄ Un trapèze dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur, et qui ne soit pas un parallélogramme.

⊂ Un quadrilatère qui ne soit pas un parallélogramme, ayant :
- les côtés deux à deux de même longueur,
- les côtés deux à deux perpendiculaires,
- les diagonales perpendiculaires,

⊆ Un quadrilatère qui ne soit pas un parallélogramme, ayant :
- deux côtés consécutifs perpendiculaires,
- les côtés deux à deux de même longueur,
- les diagonales perpendiculaires et de même longueur,

∈ Un quadrilatère qui ne soit pas un parallélogramme, ayant :
- trois côtés de même longueur,
- deux côtés perpendiculaires,
- les diagonales de même longueur