13 Les puissances

I) Définitions et exemples

Une puissance d'un nombre a est un produit dans lequel tous les facteurs sont égaux à a.
$a^n = a \times a \times a \times a \times ..... a \times a$
n s'appelle l'exposant, il désigne le nombre de ces facteurs.
a^n se lit "a exposant n" et par abus de langage "a puissance n", mais c'est a^n qui est la puissance de a et non n.

Exemples
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ est une puissance de 2.
32 est son écriture décimale ; 2^5 est son écriture « en puissance ».

$a^2 = a \times a$ se lit "a au carré" (car cela fait référence au calcul de l'aire du carré)
$a^3 = a \times a \times a$ se lit "a au cube" (car cela fait référence au calcul du volume du cube)
$a^4 = a \times a \times a \times a$ se lit "a exposant 4"

II) Signe d'une puissance

À partir de la règle des signes du produit, on peut généraliser une règle des signes pour les puissances:

Toutes les puissances d'un positif sont positives : si $a > 0$, alors $a^n > 0$

Le signe d'une puissance d'un négatif dépend de l'exposant :
- s'il est pair, la puissance est positive : si $a < 0$ et si n pair, alors $a^n > 0$.
- s'il est impair, la puissance est négative : si $a < 0$ et si n impair, alors $a^n < 0$.

Exemples
$(+ 5)^{16}$ est positif $(+ 19{,}8)^7$ est positif $(- 12)^{15}$ est négatif $(- 53{,}621)^{34}$ est positif

III) Règle de priorité

L'exposant ne concerne que le nombre ou la parenthèse qui le précède directement.

Exemples
$2 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$ mais $(2 \times 5)^2 = 10^2 = 100$
$3 \times 10^4 = 3 \times 10\,000 = 30\,000$ mais $(3 \times 10)^4 = 30^4 = 810\,000$
$(- 2)^3 = (- 2) \times (- 2) \times (- 2) = - 8$ mais $(- 2)^4 = (- 2) \times (- 2) \times (- 2) \times (- 2) = 16$

Remarque
La règle des signes du produit permet de simplifier les écritures suivantes :
Si n est pair : $(- a)^n = a^n$ **Si n est impair, $(- a)^n = - a^n$**

IV) Exposants négatifs

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
$a^4 = a \times a \times a \times a$
$a^3 = a \times a \times a$
$a^2 = a \times a$
$a^1 = a$
Lorsque l'exposant diminue de 1, le nombre de facteurs diminue de 1 ; ce qui correspond à une division par a.

Il est donc cohérent de poursuivre sur ce principe lorsque $a \neq 0$:

$a^0 = a^1 \div a = a \div a = 1$, puis $\mathbf{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

$a^{-2} = a^{-1} \div a = \frac{\frac{1}{a}}{a} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}$

Et plus généralement, si $a \neq 0$, $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ **a^{-n} désigne <u>l'inverse</u> de a^n.**

Remarque

Les puissances de 0 sont toutes égales à 0. Mais 0^0 ne peut pas être définie.

V) <u>Premières règles de calcul</u>

$\mathbf{a^n \times a^p = a^{n+p}}$ exemple : $10^{n+2} = 10^n \times 10^2$

$\mathbf{(a^n)^p = a^{np}}$ exemple : $(5^3)^2 = 5^6$

$\mathbf{a^n \times b^n = (ab)^n}$ exemple : $2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4$

VI) <u>Puissances de 10</u>

Dans une puissance de 10, l'exposant, lorsqu'il est positif, désigne le nombre de zéros écrits après le chiffre 1 dans l'écriture décimale.

$10^2 = 100$; $10^3 = 1\ 000$; $10^4 = 10\ 000$; etc.

10^3 : mille 10^6 : un million 10^9 : un milliard.

On retrouve ici, dans le fait que ces exposants sont multiples de 3, l'habitude d'écrire les nombres en groupant les chiffres 3 par 3.

Lorsque l'exposant est négatif, sa valeur absolue donne la position de l'unité après la virgule dans l'écriture décimale.

$10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$; $10^{-4} = 0{,}0001$; etc.

VII) <u>Écriture scientifique d'un nombre décimal</u>

Tout nombre décimal D peut s'écrire sous la forme $\mathbf{a \times 10^n}$.
Cette écriture porte le nom d'**écriture scientifique**.

Pour un nombre **positif**, a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 et n est un entier relatif.

Il y a alors trois situations possibles

Si $1 \leq D < 10$: l'écriture scientifique n'est pas différente de l'écriture décimale.

Si $D \geq 10$: l'exposant n est un entier positif

Si $0 < D < 1$: l'exposant n est un entier négatif.

Exemples

$27\ 540\ 000 = 2{,}754 \times 10^7$; $0{,}0653 = 6{,}53 \times 10^{-2}$

L'exposant est donné par le nombre de rangs de déplacement de la virgule.
Exposant positif pour un déplacement vers la gauche ; exposant négatif pour un déplacement vers la droite.

Interprétation

L'écriture scientifique est assez proche de la notion d'ordre de grandeur souvent étudiée les années passées.

Écrire 65 830 sous la forme $6{,}583 \times 10^4$ met en évidence que ce nombre est de l'ordre des dizaines de mille. C'est la puissance de 10 qui indique cet ordre de grandeur.

De même, écrire 0,000 34 sous la forme $3{,}4 \times 10^{-4}$ montre que ce nombre est de l'ordre des dix-millièmes.

VIII) Opérations avec les décimaux en écriture scientifique

Addition et soustraction

On ne peut compter ensemble que des nombres de même nature.
Dans l'écriture scientifique, c'est la puissance de 10 qui indique « la nature » du nombre.
Il sera donc nécessaire de convertir les nombres dans la même unité (la même puissance de 10) pour pouvoir effectuer les additions et les soustractions.

Exemples

$4 \times 10^3 + 5 \times 10^3 = (4 + 5) \times 10^3 = 9 \times 10^3$ (on compte ensemble des milliers).
$3{,}5 \times 10^{-2} - 1{,}8 \times 10^{-2} = (3{,}5 - 1{,}8) \times 10^{-2} = 1{,}7 \times 10^{-2}$ (on compte ensemble des centièmes)
$7 \times 10^4 + 8{,}2 \times 10^2 = 700 \times 10^2 + 8{,}2 \times 10^2 = 708{,}2 \times 10^2 = 7{,}082 \times 10^4$
$5{,}8 \times 10^{-3} - 7 \times 10^{-5} = 580 \times 10^{-5} - 7 \times 10^{-5} = 573 \times 10^{-5} = 5{,}73 \times 10^{-3}$

Multiplication et division

Si n et p sont deux entiers naturels,

$\mathbf{10^n \times 10^p = 10^{n+p}}$

En effet, le premier facteur contient n facteurs égaux à 10 et le deuxième en contient p.
Le produit en contient donc n + p.

$\mathbf{10^n \times 10^{-p} = \dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}}$

En effet, n = p + (n − p) donc

$10^n \times 10^{-p} = 10^{p+(n-p)} \times 10^{-p} = 10^p \times 10^{(n-p)} \times 10^{-p} = \underbrace{10^p \times 10^{-p}}_{1} \times 10^{(n-p)} = 10^{(n-p)}$

Pour multiplier ou diviser les nombres en écriture scientifique :

$\mathbf{(a \times 10^n) \times (b \times 10^p) = (a \times b) \times (10^n \times 10^p) = a \times b \times 10^{n+p}}$

$\mathbf{\dfrac{(a \times 10^n)}{(b \times 10^p)} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{10^n}{10^p} = \dfrac{a}{b} \times 10^{n-p}}$

Exemples

$14\,500 \times 0{,}008 = (1{,}45 \times 10^4) \times (8 \times 10^{-3}) = 1{,}45 \times 8 \times 10^1 = 11{,}6 \times 10 = 1{,}16 \times 10^2$

$\dfrac{75\,600}{0{,}035} = \dfrac{7{,}56 \times 10^4}{3{,}5 \times 10^{-2}} = \dfrac{7{,}56}{3{,}5} \times \dfrac{10^4}{10^{-2}} = 2{,}16 \times 10^6$

Exercices

Exercice 121

Donner la valeur décimale des nombres suivants :

$A = (3 \times 7)^2$ $B = 6 \times 2^2 \times 3 \times 5^3$ $C = (8 + 5) \times 3^2$

$D = (8 + 5 \times 3)^2$ $E = 8 + 5 \times 3^2$ $F = 3 \times 7^2$

$G = 3 \times (4 \times 5^2)^3$ $H = 4 + 5^2 \times 6$ $I = 9 \times (7 + 2^2)$

$J = 9 \times 7 + 2^2$ $K = 2{,}5^6 \times 0{,}4^7$ $L = (-0{,}2)^8 \times 5^{10}$

$M = [(-3)^2]^2$ $N = 2^8 \times 0{,}5^8$ $O = 4^{11} \times 0{,}25^{11}$

Exercice 122

Montrer que : $81^4 = 9^8$ $32^{12} = 2^{60}$

Exercice 123

Calculer les expressions suivantes :

$A = 2{,}5^4 \times 0{,}4^6$ $B = (-0{,}2)^7 \times 5^9 \times (-1)^3$ $C = 3 \times (5 \times 2^2)^3$

$D = 16 + 5^2 \times 4$ $E = 3 \times (11 + 4^2)$ $F = 9 \times 7 + 2^3$

Exercice 124

Donner, pour n = 0, puis n = 1, 2, 3, 4 et 5, la valeur décimale des expressions

n 2^n $(-2)^n$ 2^{-n} $(-2)^{-n}$ $2\times(-n)$ $-2-n$

Exercice 125

Calculer $a + b$; $(a + b)^2$; a^2 ; b^2 ; $a^2 + b^2$ dans chacun des cas suivants :

1) a = 1 et b = 2 2) a = 5 et b = – 4 3) a = – 3 et b = – 1 4) a = 11 et b = 9

Exercice 126

Conversion : recopier et compléter par une puissance de 10 :

1 km = ……m = ……mm = ……dam = ……cm = …… hm

1 hm² = ……cm² = …… m² =…… dam² = ……mm² = …… km²

1 km³ = ………hm³ = ………dam³ = ………m³ = ……… dm³ = ………cm³

Exercice 127

Transformations : écritures décimale et scientifique. Donner celle l'écriture décimale quand le nombre est en écriture scientifique et réciproquement.

$a = 472$ $b = 4{,}1 \times 10^4$ $c = 27\,600$ $d = 8{,}02 \times 10^2$

$e = 25{,}32$ $f = 1{,}1 \times 10^5$ $g = 9{,}57 \times 10^3$ $h = 965{,}7$

$i = 1{,}06 \times 10^6$ $j = 481\,000$ $k = 7 \times 10^2$ $l = 679{,}04$

Exercice 128

Calculer les quotients en utilisant les puissances de 10 :

$\dfrac{20\,000}{500}$ $\dfrac{600}{12}$ $\dfrac{56\,000}{700}$ $\dfrac{400}{2\,000}$

$\dfrac{30}{15\,000}$ $\dfrac{60\,000}{2\,000}$ $\dfrac{180}{60\,000}$ $\dfrac{450\,000}{900\,000}$

Exercice 129

Calculer $a = 0{,}25 \div \left[(-2)^9 \times (-2)^{-6} \div (-2)^2\right]^{-2}$

Exercice 130

Calculer : donner le résultat en écriture scientifique puis décimale

$A = (3{,}12 \times 10^2) \times (9{,}5 \times 10^3)$ $B = (92 \times 10^4) \times (8{,}5 \times 10^3)$

$C = (16 \times 10^5) \times (15 \times 10)$ $D = (-0{,}2 \times 10^3) \times (0{,}03 \times 10^5)$

$E = (54 \times 10^2) \times (0{,}05 \times 10^4)$ $F = (0{,}0028 \times 10^6) \times (0{,}025 \times 10^3)$

Exercice 131

Effectuer les calculs suivants

1) En se ramenant à l'écriture décimale

2) En utilisant les écritures scientifiques.

$A = 125 \times 10^5 + 32 \times 10^5$

$B = 43 \times 10^3 + 573 \times 10^2$

$C = 6 \times 10^5 + 32 \times 10^3$

Exercice 132

Une mole de carbone pèse 12 g et est composée environ de 6×10^{23} atomes de carbone. Quelle est la masse d'un atome de carbone?

Exercice 133

La vitesse de la lumière est d'environ 300 000 km/s. Une année-lumière est la distance parcourue par la lumière en une année. L'étoile Proxima du Centaure se trouve à 4,25 années lumière du système solaire. Évaluer cette distance en km.

Exercice 134

Le Rubik's cube est un jeu hongrois. Il est composé de 26 cubes mobiles autour d'un axe. Les faces sont de 6 couleurs différentes.

Avec ce jeu, il y a : 43 252 003 274 489 856 000 combinaisons différentes. En réalisant une combinaison différente par seconde, combien faudra-t-il d'années pour les essayer toutes?

Exercice 135

Résoudre l'équation (x est un entier naturel) : $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$

Exercice 136

$A = 16^{250} \times 25^{500} + 2^3$; A est-il divisible par 9 ?

Exercice 137

Montrer que $A = 5^{n+1} \times 2^{n+4} + 5^n \times 2^{n+3}$ est divisible par 11.

Exercice 138

Ranger par ordre croissant les nombres $a = 2^{85}$, $b = 3^{51}$ et $c = 4^{34}$

14 Les nombres carrés

I) Trois règles de base

On appelle nombre carré, ou plus simplement carré, tout produit de la forme n × n.

Règle n°1 : $(n \times u)^2 = n \times u \times n \times u = n^2 \times u^2$

Exemple d'utilisation

Quand on connaît le carré d'un nombre, on connaît facilement le carré d'autres nombres :

$4^2 = 16$ donc $40^2 = 4^2 \times 10^2 = 16 \times 100 = 1\,600$

$5^2 = 25$ donc $15^2 = 3^2 \times 5^2 = 9 \times 25 = 225$

Règle n°2 : $(u \div n)^2 = \left(\frac{u}{n}\right)^2 = \frac{u}{n} \times \frac{u}{n} = \frac{u^2}{n^2} = u^2 \div n^2$

Exemple d'utilisation

$6^2 = 36$ donc $0{,}6^2 = \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{6^2}{10^2} = \frac{36}{100} = 0{,}36$

Règle n°3 : $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemple d'utilisation

$41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 1 + 1^2 = 40^2 + 80 + 1 = 1\,600 + 81 = 1\,681$

$40^2 = (39 + 1)^2 = 39^2 + 78 + 1 = 39^2 + 79$ donc $39^2 = 40^2 - 79 = 1\,600 - 79 = 1\,521$

II) Suite des carrés parfaits

Les carrés des nombres entiers sont appelés des carrés parfaits.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	etc.
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	

$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, d'où $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ ou $n^2 + n + n + 1$

Pour calculer le carré du successeur, on ajoute au carré du premier nombre, ce nombre et son successeur.

Exemple d'utilisation

$81^2 = 80^2 + 80 + 81 = 6\,400 + 161 = 6\,561$

Pour calculer le carré du prédécesseur, on soustrait au carré du grand nombre, ce nombre et son prédécesseur.

Exemple d'utilisation

$109^2 = 110^2 - 110 - 109 = 12\,100 - 219 = 11\,881$

15 Les racines carrées

I) Définition

On appelle **racine carrée** du nombre positif a, le nombre positif dont le carré est égal à a ; on l'écrit $\sqrt{a}$.

Dans l'écriture $\sqrt{a}$, le signe $\sqrt{\ }$ s'appelle le **radical** et a s'appelle le **radicande**.

Ce que l'on sait des carrés suffit souvent à connaître les racines carrées :

$\sqrt{100} = 10$ car $10^2 = 100$; $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$; $\sqrt{121} = 11$ car $11^2 = 121$;

De même $\sqrt{529} = 23$; $\sqrt{0,16} = 0,4$; $\sqrt{441} = 21$

On peut calculer une valeur approchée par encadrements successifs

Pour encadrer $c = \sqrt{2}$:

$1^2 = 1$ et $2^2 = 4$ donc $\mathbf{1 < c < 2}$
$1,4^2 = 1,96$ et $1,5^2 = 2,25$ donc $\mathbf{1,4 < c < 1,5}$
$1,41^2 = 1,9881$ et $1,42^2 = 2,0164$ donc $\mathbf{1,41 < c < 1,42}$
$1,414^2 = 1,999396$ et $1,415^2 = 2,002225$ donc $\mathbf{1,414 < c < 1,415}$

Pour encadrer $c = \sqrt{3}$:

$1^2 = 1$ et $2^2 = 4$ donc $\mathbf{1 < c < 2}$
$1,7^2 = 2,89$ et $1,8^2 = 3,24$ donc $\mathbf{1,7 < c < 1,8}$
$1,73^2 = 2,9929$ et $1,74^2 = 3,0276$ donc $\mathbf{1,73 < c < 1,74}$

On peut retenir deux valeurs approchées particulières :
$\sqrt{2} \approx 1,414$ et $\sqrt{3} \approx 1,732$

II) Algorithme de calcul approché

Pour calculer une valeur approchée de la racine carrée (on dit « **extraire** la racine carrée ») du nombre 52 587, par exemple.

Disposer les nombres en tableau comme dans une division
La racine apparaîtra en A ; en B et C des calculs intermédiaires.

52587	A
B	C

Fractionner l'écriture du nombre 52 587 en tranches de deux chiffres à partir de la droite.

5	25	87	A
			C

On cherche le nombre le plus grand dont le carré est inférieur à la première tranche de gauche (ici : 5) :
c'est 2, car $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$. On place 2 en A. C'est le premier chiffre de gauche de la racine carrée.
On soustrait le carré de 2 à 5, il reste 1.

5	25	87	2
1			C

On abaisse la tranche suivante pour former le nombre 125.
On double le nombre qui est en A. On obtient 4, que l'on place en C.

5	25	87	2
1	25		4

On cherche le chiffre u le plus grand tel que le produit $\overline{4u} \times u$ soit inférieur à 125.

(l'écriture $\overline{4u}$ désigne un nombre de deux chiffres, 4 dizaines et u unités).
42 × 2 = 84 et 43 × 3 = 129. C'est donc 2 qui convient.

On place ce chiffre dans A à la suite du premier; ce qui donne pour l'instant le nombre 22.
Dans B, on soustrait 84 à 125, il reste 41. On abaisse deux la tranche suivante.

5	25	87	22
1	25		42 × 2 = 84
	41	87	43 × 3 = 129

On double le nombre qui est en A. On obtient 44, que l'on place en C.
On cherche le chiffre u le plus grand pour que $\overline{44u}$× u soit inférieur à 4 187.

5	25	87	22
1	25		42 × 2 = 84
	41	87	43 × 3 = 129
	40	41	44

448 × 8 = 3 584 et 449 × 9 = 4 041. C'est donc 9 qui convient, on le place en A à la suite des deux premiers.
On obtient ainsi une valeur approchée à l'unité de la racine carrée de 52 587.

On peut écrire : $\sqrt{52\,587} \approx 229$.

Dans B, on soustrait 4 041. Il reste 146.
On peut poursuivre le calcul de la racine après la virgule. Pour cela, on abaisse deux 0 et on place la virgule à la racine.
On calcule sur le même principe qu'aux étapes précédentes, sans tenir compte de la virgule.

5	25	87		229,
1	25			42 × 2 = 84
	41	87		43 × 3 = 129
	− 40	41		~~448 × 8 = 3 584~~
	1	46	00	449 × 9 = 4 041
	− 1	37	49	4 58**3** × **3** = 13 749
		8	51	

On peut écrire : $\sqrt{52\,587} \approx 229{,}3$

Voici ce que donnerait l'étape suivante de l'algorithme.

5	25	87		229,3
1	25			42 × 2 = 84
	41	87		43 × 3 = 129
	− 40	41		~~448 × 8 = 3 584~~
	1	46	00	449 × 9 = 4 041
	− 1	37	49	4 583 × 3 = 13 749
	8	51	00	45 86**1** × **1** = 45 861
	− 4	58	61	
	3	92	39	

On peut écrire : $\sqrt{52\,587} \approx 229{,}31$