Semaine 21

Suites numériques

On commence cette semaine le chapitre sur les suites numériques. C'est une notion essentielle en mathématiques et ce chapitre constitue une partie importante du programme de première. Il sera décomposé en plusieurs parties et s'étalera sur cinq semaines. On utilisera ensuite les notions développées dans ce chapitre pour approfondir les notions vues précédemment, notamment en probabilités.

I. Généralités

1. Notion

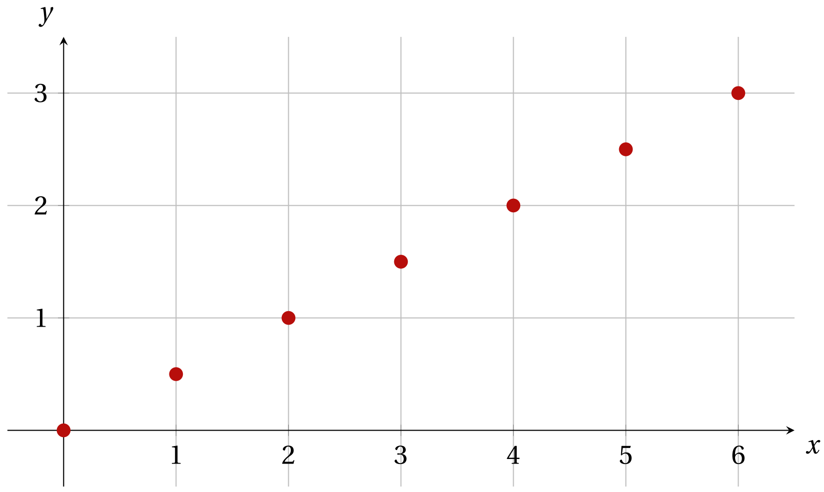
Définition 21.1. Une ***suite numérique*** est une fonction réelle à variable réelle dont le domaine de définition est contenu dans $\mathbb{N}$.

On note généralement u (ou v ou w) une suite, n la variable associée à une suite et u_n l'image de n par la suite u. L'entier n est appelé le ***rang*** de la suite et u_n le ***terme général*** de la suite. On a ainsi la correspondance suivante entre les terminologies et notations associées plus généralement aux fonctions et celles associées plus particulièrement aux suites :

			$\Longrightarrow$			
fonction	:	f		suite	:	u
variable	:	x	$\Longrightarrow$	rang	:	n
image	:	$f(x)$		terme général	:	u_n

Une suite est une fonction ***discrète*** ce qui signifie en mathématiques que les points de son domaine de définition sont séparés les uns des autres (on dit aussi qu'ils sont ***isolés***).

▪ **Exemple 21.1.** Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{2}n$. Sa représentation graphique est un ensemble de points isolés les uns des autres, non reliés par des segments de droite.



■

Il y a plusieurs notations équivalentes qui sont utilisées pour désigner la suite u :

— u ;

— (u_n) ;

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

à ne pas confondre avec u_n qui est le terme général de la suite (tout comme la fonction f désigne toute la fonction alors que $f(x)$ n'est que l'image de x par f).

Dans la suite du cours, on considère des suites définies sur $\mathbb{N}$ ou ***à partir d'un certain rang*** n_0 (c'est-à-dire définies pour tout entier $n \geq n_0$).

2. Pourquoi les suites ?

On peut identifier deux raisons principales qui justifient l'importance des suites en mathématiques.

Premièrement, dans de nombreux contextes réels les paramètres se modélisent plus facilement par des variables à valeurs entières (discrètes) que par des variables à valeurs réelles (continues). C'est le cas, par exemple, pour le nombre d'individus dans une population (on ne peut pas vraiment parler d'un nombre π d'êtres humains) ; ou pour les échéances des opérations bancaires où les calculs peuvent se faire une fois par mois (pour le calcul des intérêts d'un prêt immobilier par exemple) ou tous les jours (dans le cas des AJIO), mais jamais à tout instant.

Deuxièmement, les suites permettent d'utiliser la notion de ***récurrence*** qui permet de définir les termes d'une suite par rapport aux termes qui les précèdent. Là encore, il existe de nombreux contextes dans lesquels un système change d'état, étape par étape, et dont l'état courant du système dépend uniquement de l'état du système à l'étape précédente.

Ces deux visions complémentaires, en terme de modélisation de problèmes réels par des suites, se traduisent en deux façons d'exprimer mathématiquement une suite.

On peut exprimer une suite sous sa ***forme explicite*** en indiquant, par exemple, que u est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u = \frac{n}{2}$; ou on peut exprimer une suite via une ***relation de récurrence*** en indiquant, par exemple, que u est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La relation de récurrence permet de définir chacun des termes de proche en proche. Dans l'exemple, on a :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 0\\
&u_1 = u_{0+1} = u_0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\\
&u_2 = u_{1+1} = u_1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1\\
&u_3 = u_2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

⚠ u_{n+1} ne signifie pas $u_n + 1$: le premier est le terme de la suite de rang $n+1$ alors que le deuxième est le terme de la suite de rang n, augmenté de 1 (pour ne pas prêter à confusion si on a une écriture peu lisible, il vaut mieux dans ce cas écrire $1 + u_n$ plutôt que $u_n + 1$).

II. Comportement d'une suite

1. Variations

De la même façon que l'on s'intéresse au sens de variations des fonctions, on s'intéresse également au sens de variations des suites.

Définition 21.2. Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. On dit que u est :

— ***croissante*** si et seulement si, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m < n \implies u_m \leq u_n$$

— ***décroissante*** si et seulement si, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m < n \implies u_m \geq u_n$$

— ***constante*** si et seulement si, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$u_m = u_n$$

Ces définitions ne sont que les transpositions directes des définitions pour les fonctions. Il existe par contre des propriétés qui ne s'appliquent qu'aux suites et qui sont très utiles pour déterminer le sens de variations d'une suite.

Propriété 21.1. Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$, alors :

— u est croissante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$;

— u est décroissante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$;

— u est constante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$.

Démonstration. On montre le résultat dans le cas croissant, les autres démonstrations étant analogues.

Si u est croissante alors on a, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n \implies u_m \leq u_n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n < n+1$, donc $u_n \leq u_{n+1}$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Réciproquement, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Alors, soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$, on a $n = m + (n-m)$ où $(n-m)$ est un entier strictement positif. On a donc, de proche en proche :

$$u_m \leq u_{m+1} \leq u_{m+2} \leq \ldots \leq u_{m+(n-m)} = u_n$$

Ainsi, $u_m \leq u_n$ et la suite u est bien croissante. ■

▪ **Exemple 21.2.** La suite de terme général $u_n = n^2 - n$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n \geq 0$$

▪

Si la suite est strictement positive, on a également les résultats suivants :

Propriété 21.2. Soit u une suite définie sur N telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors :

— u est croissante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$;

— u est décroissante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$;

— u est constante
$\iff$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Démonstration. Cette proposition est un corollaire direct de la proposition précédente (il suffit de diviser par u_n dans l'inégalité ce qui est possible car $u_n \neq 0$ et qui ne change pas le signe de l'inégalité car $u_n > 0$). ■

▪ **Exemple 21.3.** La suite de terme général $u_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n+4}{n} = 1 + \frac{4}{n} \geq 1$$

▪

Notez que, comme pour les fonctions, on parle également de suite strictement croissante et de suite strictement décroissante dans les cas où les inégalités sont strictes.

2. Bornes d'une suite

Définition 21.3. Soit u une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$. Soit m et M deux réels. On dit que u est ***minorée*** par m (respectivement ***majorée*** par M) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$ (respectivement $u_n \leq \mathrm{M}$). On dit que u est ***bornée*** si elle est à la fois minorée et majorée.

▪ **Exemple 21.4.** La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n+1}$, est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

▪

3. Limites d'une suite

On présente dans cette section la notion intuitive de la limite d'une suite. Vous découvrirez une définition mathématique et plus rigoureuse de cette notion dans la suite de votre curriculum.

Une suite peut avoir une limite quand n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire quand n devient très grand) ou bien ne pas en avoir. Si une suite possède une limite, celle-ci peut-être finie ou infinie.

Dans le cas fini, cela signifie que la suite se rapproche à l'extrême d'un nombre donné jusqu'à devenir quasiment confondu avec ce nombre lorsque n tend vers $+\infty$. On note généralement l une telle limite et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

qui se lit « limite quand n tend vers $+\infty$ de u_n égal l» .

Dans le cas d'une limite infinie, cela signifie que soit :

— la suite devient extrêmement grande quand n tend vers $+\infty$. On dit alors que u tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

— la suite devient extrêmement petite quand n tend vers $+\infty$. On dit alors que u tend vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

▪ **Exemple 21.5.** On a $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n+1} = 3$ et $\lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$. ▪

Exercices non à soumettre

■ **Exercice 21.1.** Déterminez le rang minimal à partir duquel la suite u de terme général $u_n = \sqrt{3n-15}$ peut être définie. ■

■ **Exercice 21.2.** Déterminez le terme de rang $n+2$ de la suite v de terme général :

$$v_n = \frac{n-1}{n^2+n+1}$$

■

■ **Exercice 21.3.** Montrez que la donnée du terme $u_0 = 1$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2}{2-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ne permet pas de définir une suite numérique. ■

■ **Exercice 21.4.** Déterminez les valeurs des termes u_5 , u_{15} , u_{25} , u_{35} et u_{45} de la suite u de terme général $u_n = \frac{4n-5}{5n+5}$. ■

■ **Exercice 21.5.** Soit la suite u de terme général $u_n = 3n^2 - 4,5$. Calculez la différence de deux termes consécutifs et déduisez-en que la suite u est croissante. ■

■ **Exercice 21.6.** Soit la suite v de terme général $v_n = n3^{-n}$. Calculez le rapport de deux termes consécutifs et déduisez-en que la suite v est décroissante à partir d'un certain rang. ■

■ **Exercice 21.7.** Soit la suite w de terme général $w_n = \frac{2n+9}{n+3}$. Démontrez que w est décroissante. ■

■ **Exercice 21.8.** Démontrez que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{(n-3)^2+1}$$

est décroissante, à partir du rang 3. ▪

▪ **Exercice 21.9.** Montrez que la suite de terme général $u_n = \frac{\cos(n)+2}{3}$ est bornée. ▪

▪ **Exercice 21.10.** On considère les suites u, v, w et t définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2\times(-1)^n}{n+2}\ ;\quad v_n = 0,5n^2 - 4n - 2\ ;\quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = -\frac{2}{3}w_n + 4 \end{cases}\ ;\quad \begin{cases} t_0 = 3 \\ t_{n+1} = 0,9\,t_n \end{cases}$$

1. À l'aide d'une calculatrice tracez la représentation graphique de ces suites pour les 10 premiers rangs.
2. Conjecturez la limite de chaque suite.

▪