Module 2

Jour 1

Démontrer en géométrie
Réciproque et contraposée

I. Propriété directe : l'implication

Les propriétés mathématiques s'énoncent souvent sous la forme « Si ...alors ... ».

— L'expression (ou énoncé) qui est entre « si » et « alors » indique les hypothèses ou conditions d'application de la propriété,

— L'expression qui suit « alors » est la conclusion de la propriété.

Lorsque la condition entre « si » et « alors » est vérifiée, alors ce qui est écrit après « alors » est aussi vrai.

Exemple
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.

Parfois l'implication est implicite dans un énoncé. Ainsi, on énonce parfois « les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » au lieu de : « si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires » .

II. Énoncé réciproque d'une propriété

La réciproque d'une propriété mathématique s'énonce aussi sous la forme « Si ...alors ... ».
Elle s'obtient en permutant les conditions d'applications et la conclusion de la propriété.

Propriété : Si énoncé 1 alors énoncé 2.

Réciproque de la propriété : Si énoncé 2 alors énoncé 1.

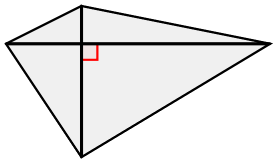
Remarque
Il est parfois nécessaire de modifier légèrement la phrase obtenue pour qu'elle soit correcte en français.

Exemple
Si l'on permute les conditions d'applications et la conclusion de la propriété de l'exemple précédent, on obtient :
Si ses diagonales ont le même milieu, alors un quadrilatère est un parallélogramme.
La formulation de cet énoncé n'est pas correcte, on le reformule donc :
Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.

L'énoncé réciproque d'une propriété n'est pas toujours vrai, ce n'est pas toujours une propriété.

Exemples

1. La réciproque de la propriété précédente est vraie. C'est une propriété du cours sur les parallélogrammes.
2. La propriété « Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires. » a pour réciproque : « Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. » Cette réciproque est fausse : un contre-exemple est donné par la figure ci-dessous. Ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires mais n'a pas des côtés de même longueur, ce n'est donc pas un losange.



III. Énoncés équivalents - Propriété caractéristique

Exemple

La propriété « Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu » est vraie.
Sa réciproque « Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme » est aussi vraie.
On dit que « être un parallélogramme » et « être un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu » sont des énoncés équivalents.

On dit aussi qu'« avoir ses diagonales de même milieu » est une **propriété caractéristique** du parallélogramme. Ainsi, une propriété caractéristique d'un objet est une propriété possédée par cet objet seulement.

Lorsqu'une propriété :
Propriété : Si énoncé 1 alors énoncé 2.

et sa réciproque :

Réciproque de la propriété : Si énoncé 2 alors énoncé 1.

sont toutes les deux vraies, alors on dit que l'énoncé 1 et l'énoncé 2 sont équivalents.

Si l'un des énoncés précise la nature d'un objet mathématique, alors il est appelé propriété caractéristique de cet objet. Parmi toutes les propriétés caractéristiques d'un objet mathématique, l'une a été choisie arbitrairement pour porter le nom de définition.

IV. Contraposée d'une propriété

La contraposée d'une propriété mathématique s'énonce aussi sous la forme « Si ...alors ... ».
Elle s'obtient en prenant la négation et en permutant les conditions d'applications et la conclusion de la propriété.

Propriété : Si énoncé 1 alors énoncé 2.

Contraposée de la propriété : Si négation de l'énoncé 2 alors négation de l'énoncé 1.

Remarque
Comme pour la réciproque d'une propriété, il est parfois nécessaire de modifier légèrement la phrase obtenue pour qu'elle soit correcte en français.

Exemple
La contraposée de la propriété « Si un quadrilatère un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu » s'énonce :
Si les diagonales d'un quadrilatère n'ont pas le même milieu, alors ce n'est pas un parallélogramme.

La contraposée d'une propriété est toujours vraie, c'est une propriété.

Exercices

Exercice 29. Pour les énoncés suivants, indiquer s'ils sont vrais ou faux, énoncer leur réciproque puis préciser si cette réciproque est vraie ou fausse.

1. Si $(AB) \perp (CD)$, alors (AB) est la médiatrice de $[CD]$.
2. Si $AB = BC = CD = DA$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
3. Si $\widehat{DAB} = 90°$, alors le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
4. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
5. Si A appartient au segment $[BC]$, alors les points A, B et C sont alignés.
6. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $AI = IB$.
7. Si les droites (d) et (d') sont perpendiculaires, alors elles sont sécantes.
8. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors c'est un rectangle.
9. Si ABC est un triangle rectangle, alors il a un angle droit.
10. Si $ABCD$ est un rectangle, alors $ABCD$ est un losange.
11. Si un triangle est équilatéral, alors il est isocèle.
12. Si un quadrilatère a quatre côtés égaux, alors c'est un carré.

Exercice 30. Écrire la contraposée de chacune des propriétés suivantes.

1. Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales ont la même longueur.
2. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
3. Si deux droites sont parallèles, alors les angles alternes internes qu'elles forment avec une sécante ont la même mesure.
4. Si un triangle est rectangle, alors ses angles aigus sont complémentaires.
5. Si un point M appartient à la médiatrice d'un segment $[AB]$, alors $MA = MB$.
6. Si M appartient au segment $[AB]$, alors $MA + MB = AB$.
7. Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.

Exercice 31. Donner une propriété caractéristique des objets mathématiques suivants :

1. un triangle rectangle
2. un triangle isocèle
3. un triangle équilatéral
4. le milieu d'un segment
5. la médiatrice d'un segment
6. un parallélogramme
7. un rectangle
8. un losange
9. un carré
10. un cercle

Jour 2

Démontrer en géométrie
Chercher une démonstration

I. Première étape : bien lire l'énoncé

On lit l'énoncé. On repère et isole les données : les hypothèses. C'est ce dont on part.
De même, on repère et isole la conclusion : l'objectif à atteindre. Ce que l'on cherche à démontrer peut être suggéré dans le texte de l'exercice (démontrer que ...), sinon il faudra d'abord le conjecturer à partir d'une figure.

II. Deuxième étape : construction de la figure

1. On construit une figure claire, en évitant les cas particuliers, et on écrit les hypothèses au fur et à mesure de la construction, si possible sous forme de codage.
2. On écrit la conclusion : ce qu'il faut démontrer.

III. Troisième étape : la recherche

1. On cherche des propriétés qui pourraient être utilisées, en relation avec les hypothèses, des mots importants du texte ou des parties de la figure (figures clés).
2. On cherche :
   (a) Soit à partir de ce qui est donné dans le texte. On traduit les hypothèses et on essaye d'en déduire des conséquences à l'aide de propriétés. Chaque mot du vocabulaire géométrique doit évoquer des définitions, propriétés où il intervient.
   (b) Soit à partir de la conclusion, c'est-à-dire de ce qu'il faut démontrer. L'examen de la conclusion attendue (alignement, parallélisme, calcul de distance,...) permet d'orienter sa recherche. Il faut se demander quels sont les outils connus qui permettent de d'aboutir à ces résultats et si les conditions sont réunies pour pouvoir les appliquer. On est parfois amené à se dire « pour appliquer cette propriété, il faudrait d'abord que je démontre ce résultat » . On bâtit ainsi de proche ne proche une suite de chaînons déductifs.

   Dans la pratique, la recherche se fait souvent dans les deux sens, jusqu'à ce que les éléments de la chaîne logique se rejoignent.

IV. Quatrième étape : la rédaction

On rédige une démonstration avec des phrases, en organisant dans l'ordre les chaînons déductifs qui ont été trouvés. Des mots utiles :

— Avant les hypothèses, on peut trouver les mots :
Je sais que. . . | Par hypothèse . . . | D'après l'énoncé. . .

— Avant d'énoncer la propriété ou la définition utilisées :
Or. . . | Comme. . . | D'après la propriété suivante. . . | Par définition. . .

— Entre la propriété et la conclusion :
D'où. . . | Par conséquent. . . | Ainsi. . . | On en déduit. . . | Donc. . .

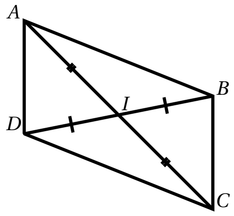
V. Cinquième étape : contrôle de la rédaction

Afin de contrôler la rédaction d'une démonstration, on peut se poser les questions suivantes :

- Y a-t-il des affirmations sans preuve ?
- Les affirmations suivant « on sait que » sont-elles bien des données de l'énoncé ou des conclusions d'étapes précédentes ?
- Les propriétés utiles sont-elles bien citées ?
- Les propriétés utilisées existent-elles bien ?
- À chaque chaînon déductif, y a-t-il bien correspondance entre :
  - Les données et les conditions d'application de la propriété,
  - La conclusion de la propriété et la conclusion du chaînon.
- Y a-t-il correspondance entre la conclusion d'un chaînon et le début du chaînon suivant ?

Exercices

Exercice 32. On considère le quadrilatère ci-dessous où I est le milieu des des segments $[AC]$ et $[BD]$.



On se propose de démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Citer les propriétés et/ou définitions que l'on peut utiliser pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.
2. Voici la structure de la démonstration à un pas permettant de prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
   - Données utiles : I est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$.
   - Énoncé : ...
   - Conclusion : $ABCD$ est un parallélogramme.

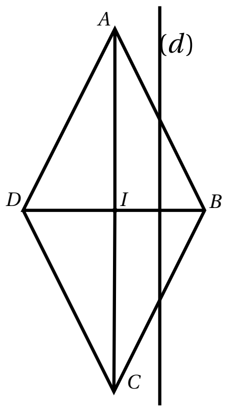
   Parmi les propriétés et définitions trouvées à la question 1, quelles sont celles dont les conditions d'application correspondent aux hypothèses de ce chaînon ?
3. Rédiger cette démonstration.

Exercice 33.

1. Construire un parallélogramme $ABCD$.
2. Voici la structure de la démonstration à un pas permettant de prouver que $AB = CD$ et $AD = BC$.
   - Données utiles : $ABCD$ est un parallélogramme.
   - Énoncé : ...
   - Conclusion : $AB = CD$ et $AD = BC$.

   Quelle propriété a des conditions d'application correspondant aux hypothèses de ce chaînon et une conclusion correspondant à celle du chaînon ?
3. Rédiger cette démonstration.

Exercice 34.



On considère la figure ci-contre. $ABCD$ est un losange dont les diagonales se coupent en I.
La droite (d) est la médiatrice de $[IB]$.
On souhaite démontrer que les droites (AC) et (d) sont parallèles. [...]

Jour 3

Démontrer en géométrie
Exercices

[...]

Jour 4

Envoyer le devoir n°1 à la correction