MATHEMATIQUES

Seconde

- Premier trimestre -

76/78 rue Saint Lazare – 75009 Paris
www.eib-adistance.com

INTRODUCTION : QUELQUES CONSEILS

1) Organisation de l'année

a) Le programme traité par EIB à distance

1) Le programme proposé au cours de ces trois trimestres de la classe de Seconde en mathématiques couvre l'ensemble des points figurant au programme officiel de l'Éducation Nationale.

2) Mais EIB à Distance a toujours fait le choix de ne pas se limiter aux contenus proposés. C 'est pourquoi, une fois encore, certains éléments traités dans ce programme

pourront paraître à certains "hors programme". Il nous a semblé que la cohérence de l'ensemble nécessitait de les incorporer dans la mesure où le programme de spécialité mathématiques de première est plus exigeant.

3) Si vous avez suivi les cours de mathématiques proposés par un collège de bon niveau, vous constaterez que beaucoup de points ont déjà été traités dans le cadre des années antérieures. Ils sont ici repris afin de permettre à tous de préparer les années futures avec les mêmes bases. Chacun agira selon sa convenance et ses besoins. Si certaines notions vous sont très familières, il n'est peut-être pas indispensable de traiter tous les exercices proposés. N'en traiter que quelques-uns pour vérifier les acquis peut parfois suffire. Il vaut mieux s'attarder sur ce qui est nouveau et différent. En particulier certains exercices qui peuvent sembler familiers trouveront une autre présentation ou un autre type de résolution cette année.

b)Le découpage

Le premier trimestre comporte beaucoup de révisions et de mises au point, que les "vraies" nouveautés sont étalées tout au long de l'année (triangles semblables et isométriques, ordre, fonctions etc)

Tout élève doit avoir étudié l'ensemble des points traités dans ce programme, néanmoins, pour les élèves qui auront fait, au cours de l'année, le choix d'une orientation vers la filière littéraire, il sera proposé au troisième trimestre des devoirs à soumettre dont le contenu sera plus spécifiquement orienté vers les acquis spécifiques à cette filière.

2) Les outils de travail

a) L'usage des calculatrices

Certes recommandé par le programme officiel, l'usage de la calculatrice pose cependant parfois des problèmes qui gênent la compréhension des concepts.

Néanmoins, l'introduction de l'algorithmique, cette année, nécessite la maîtrise de l'utilisation de la calculatrice, du logiciel Python ou de Geogebra.

On cherchera donc à en faire un outil utile. Pour vérifier les calculs, pour chercher des pistes parfois, pour accélérer des processus répétitifs. Mais le travail de recherche personnelle, la répétition de calculs "à la main" sont des conditions indispensables à une bonne acquisition des concepts.

b) L'ordinateur

Son utilisation est particulièrement recommandée. Mais là encore, il nous apparaît que c'est lorsque l'on sait faire des mathématiques que l'on se sert au mieux des outils actuellement existants.

- **Tableur**

Il est important de savoir assez vite mettre en pratique dans un tableur les notions étudiées en mathématiques. Néanmoins, c'est l'étude des notions qui permettra d'être efficace avec le tableur et rarement le contraire.

- **Grapheur**

Les représentations graphiques sont un des points importants travaillés en classe de seconde. Laisser faire ce travail à des outils tels que la calculatrice graphique ou un logiciel de construction graphique ne permettra pas de s'approprier correctement les connaissances qui sont en jeu. En revanche, quand le temps d'apprentissage est suffisant pour une bonne connaissance du cours et de ses applications, on gagne beaucoup de vitesse et de compréhension profonde en utilisant ces outils.

3) Organisation du travail personnel

a) Emploi du temps

Une bonne organisation : 1 h à 1,5 h quatre fois dans la semaine en fonction des facilités et des difficultés de l'élève.

b) Les cours

Il peut être utile de faire des fiches personnelles résumant les contenus du cours. Le temps passé à réécrire l'essentiel, à sa manière, permet de mémoriser.

c) Les exercices d'entraînement

Ils sont à la base du travail proposé ici. Il est indispensable d'en traiter le maximum. Une bonne pratique est de traiter rapidement tous les énoncés au brouillon, sans s'attarder sur ce qui semble évident ou facile. Et accorder un temps plus long, en soignant davantage la forme dès qu'une difficulté apparaît. Ensuite, bien sûr, on confrontera son travail aux corrigés proposés. Certains sont très complets, d'autres plus elliptiques, ce, afin d'encourager de plus longues recherches.

d) Les devoirs à soumettre

Il est souhaitable de les préparer entièrement au brouillon (en plusieurs étapes si nécessaire). Et de bien réfléchir à ce qu'il faut recopier (et comment) au propre.
L'idée de base est la suivante : **le correcteur doit pouvoir lire votre devoir sans avoir recours à l'énoncé ni se poser continuellement des questions. Il s'agit donc bien de <u>rédiger</u> le devoir.**

PROGRAMME DE MATHEMATIQUES

Classe de Seconde

ORGANISATION DU PREMIER TRIMESTRE

Séquences	Leçons	Devoirs
	1. Les configurations et les transformations planes	
1	♦ Le triangle rectangle ♦ Le parallélogramme ♦ Le théorème de Thalès ♦ Cercles et angles	
2	♦ Droites du triangle ♦ Les transformations	**Devoir n°1**
	2. Calcul algébrique et numérique	
3	♦ Transformations algébriques (distributivité) ♦ Analyse d'expressions littérales	
4	♦ Applications numériques (attribuer une valeur à une variable) ♦ Équations et inéquations de degré 1	
	3. Les triangles	
5	♦ Triangles isométriques	
6	♦ Triangles semblables	**Devoir n° 2**
	4. Statistiques	
7	♦ Vocabulaire statistique ♦ Moyennes; propriétés ♦ Caractéristiques de position	
8	♦ Caractéristique de dispersion. ♦ Échantillons; simulations	**Devoir n° 3**
	5. Arithmétique; Ensembles de nombres	
9	♦ Division euclidienne; divisibilité ♦ Nombres premiers; décomposition; PGCD PPMC	
10	♦ Différentes écritures des nombres; simplifications ♦ Nombres rationnels; décimaux; entiers ♦ Ensembles de nombres; approche des réels	**Devoir n° 4**

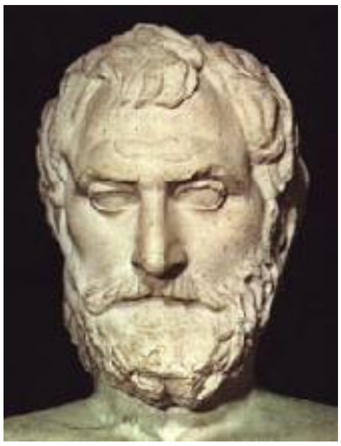
En fin de fascicule :

- Les corrigés des exercices non à soumettre
- puis les énoncés des devoirs à soumettre

CHAPITRE 1

LES CONFIGURATIONS ET LES TRANSFORMATIONS PLANES

- LE TRIANGLE RECTANGLE
- LE PARALLELOGRAMME
- LE THEOREME DE THALES
- CERCLES ET ANGLES
- DROITES DU TRIANGLE
- LES TRANSFORMATIONS



SÉQUENCE 1

I) Le triangle rectangle

1) Les propriétés du triangle rectangle

<u>Propriété 1</u> : (angles du triangle rectangle)

Si ABC est rectangle en A, alors les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires.

<u>Propriété 2</u> : (cercle circonscrit)

Si un triangle est rectangle, alors le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

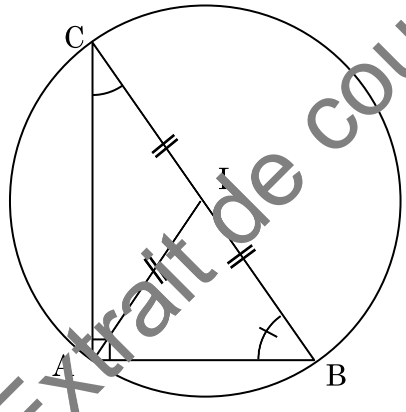
<u>Propriété 3</u> : (propriété de la médiane)

Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

<u>Propriété 4</u> : (énoncé de Pythagore)

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Illustration des propriétés :



Si ABC est rectangle en A
I est le milieu de [BC]
$(\mathscr{C})$ cercle circonscrit à ABC

alors,

- $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ (propriété 1)
- I est le centre de $(\mathscr{C})$. (propriété 2)
- $IA = \dfrac{BC}{2}$ (propriété 3)
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (propriété 4)

Voilà le bilan des diverses propriétés que l'on connaît du triangle rectangle. Ce sont des conditions **nécessaires** pour qu'un triangle soit rectangle.
C'est à dire que si un triangle ne possède pas l'une de ces propriétés, ce triangle ne peut pas être rectangle.

2) Démontrer qu'un triangle est rectangle

La question est maintenant de savoir si ces propriétés sont **suffisantes** pour définir un triangle rectangle; c'est à dire si elles suffisent pour obliger le triangle à être rectangle.
Il s'agit donc d'étudier les **réciproques** de chacune des propriétés précédentes.

<u>Réciproque 1 :</u> (de la propriété des angles aigus)

Si un triangle a deux angles complémentaires, alors le triangle st rectangle.

Réciproque 2 : (de la propriété du cercle circonscrit)

Si un triangle est inscrit dans un cercle avec un de ses côtés diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle.

Réciproque 3 : (de la propriété de la médiane)

Dans un triangle, si la médiane relative à un côté a pour longueur la moitié de ce côté, alors le triangle est rectangle; et ce côté est son hypoténuse.

Réciproque 4 : (de la propriété de Pythagore)

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côté, alors le triangle est rectangle.

Illustration des réciproques :

Si ABC est un triangle; I est le milieu de [BC], $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit à ABC
alors, dans l'un ou l'autre des cas suivants :

- $\widehat{A} = 90°$ ou $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$ (réciproque 1)
- I est le centre de $(\mathcal{C})$. (réciproque 2)
- $IA = \frac{BC}{2}$ (réciproque 3)
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (réciproque 4)

on peut affirmer que ABC est rectangle en A.

3) Propriétés caractéristiques

Les propriétés énoncées sont donc à la fois **nécessaires et suffisantes** pour qu'un triangle soit rectangle. Ce qui signifie que si l'une de ces propriétés n'est pas vérifiée, le triangle ne peut pas être rectangle; et qu'il suffit que l'une soit vérifiée pour que le triangle soit rectangle.
De telles propriétés (dont la réciproque est vraie) sont appelées des propriétés caractéristiques. (Elles mettent en évidence un caractère particulier des triangles rectangles, ce qui les différencie des triangles en général)

Bilan :
On peut prouver qu'un triangle **est ou n'est pas** rectangle lorsque :

- On connaît deux des angles.
- On connaît la position du centre du cercle circonscrit.
- On connaît la longueur du plus grand côté et celle de la médiane relative à ce côté.
- On connaît les longueurs des trois côtés.

II) Les parallélogrammes

1) Les propriétés caractéristiques du parallélogramme

Propriété 1 :

Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme. Et réciproquement, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses **côtés** sont **parallèles deux à deux**.

Propriété 2 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses **diagonales** ont le **même milieu**; et réciproquement si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme.

Propriété 3 :

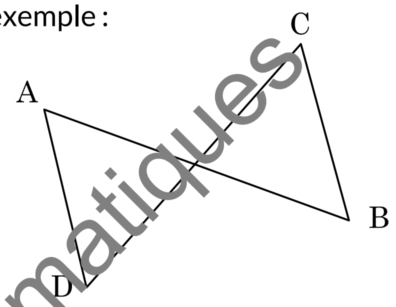
Si un quadrilatère a ses angles opposés deux à deux de même mesure, alors c'est un parallélogramme. Réciproquement, si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses **angles opposés** sont **égaux**.

Certaines propriétés du parallélogramme ne sont pas des propriétés caractéristiques. Il y manque parfois un élément qui rend la réciproque fausse. Voyons un exemple :
Propriété 4 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont égaux.

La réciproque serait :
Si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme.
Cette réciproque est fausse : montrons le sur un contre-exemple :

ABCD est un quadrilatère.
AD = BC et AB = CD
Mais ABCD n'est pas un parallélogramme.



2) Les parallélogrammes particuliers

Les propriétés caractéristiques traduisent la double notion de **suffisance** et de **nécessité**. On peut traduire cette double notion par une expression comme "**il faut et il suffit que** …". On utilise aussi parfois une formulation du type "**si et seulement si** …".
Par exemple la même propriété 1 caractéristique du parallélogramme (voir plus haut) peut être énoncée de ces trois manières différentes :

- Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés sont parallèles deux à deux.
- Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il faut et il suffit que ses côtés soient parallèles deux à deux.
- Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il est nécessaire et suffisant que ses côtés soient parallèles deux à deux.

a) Rectangle

Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si l'un de ces conditions est vérifiée :

- Il a trois angles droits.
- Ses diagonales ont la même longueur et le même milieu.
- C'est un parallélogramme qui a un angle droit.
- C'est un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur.

b) Losange

Un quadrilatère est un losange si et seulement si l'un de ces conditions est vérifiée :

- Il a quatre côtés de même longueur.
- Ses diagonales sont perpendiculaires et de même milieu.
- C'est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux.
- C'est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires.

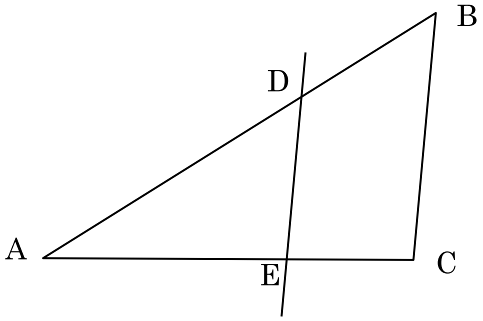
c) Carré

Si un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange, alors c'est un carré.
Il suffit donc de combiner les propriétés énoncées ci-dessus.

III. Le théorème de Thalès

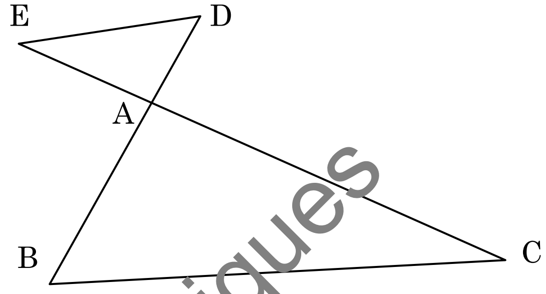
1) Théorème "direct"

1er cas



ABC est un triangle. D est un point de [AB] et E est un point de [AC] tels que (DE) // (BC)

2ème cas



ABC est un triangle. D est un point de [BA) hors de [AB] et E est un point de [CA) hors de [AC] tels que (DE) // (BC)

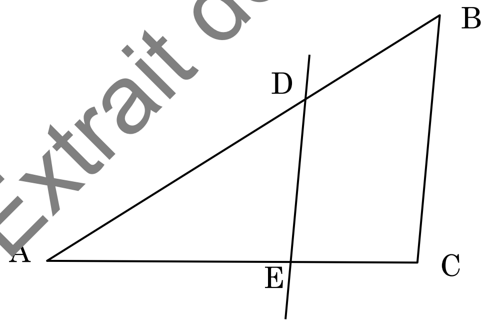
Alors les longueurs des côtés des triangles ABC et ADE sont proportionnelles; c'est à dire que : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (ou les inverses : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$)

Remarque : Dans cette situation, il y a d'autres égalités de rapports qui se déduisent de cette première série, mais ils ne mettent pas en jeu tous les côtés (notamment les côtés parallèles) et sont donc à utiliser avec prudence.

Citons tout de même à titre d'exemple : (pour la figure1) : $\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$ ou $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$

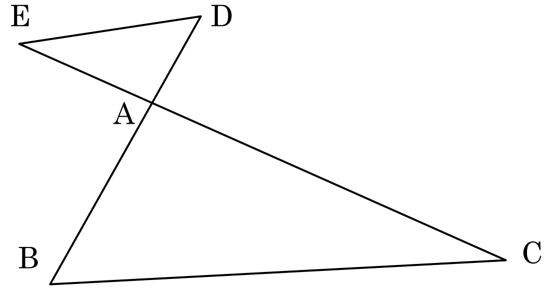
2) Réciproque du théorème de Thalès

1er cas



ABC est un triangle. D est un point de [AB] et E est un point de [AC] tels que $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

2ème cas



ABC est un triangle. D est un point de [BA) hors de [AB] et E est un point de [CA) hors de [AC] tels que $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

Alors les droites (DE) et (BC) sont parallèles et le rapport $\frac{BC}{DE}$ est égal aux deux autres

Remarque : D'autres égalités de rapports peuvent permettre de conclure aussi au parallélisme des droites. Néanmoins, par prudence, nous n'utiliserons que ceux proposés ci-dessus comme hypothèse de la réciproque.

En résumé :
Le théorème permet de calculer une longueur ou de montrer que des droites ne sont pas parallèles.
La réciproque permet de montrer que des droites sont parallèles.

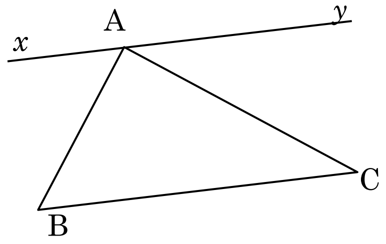
IV) Cercles et angles

1) Angles dans les polygones

a) Somme des angles dans le triangle :

Propriété :
La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Démonstration :
Plaçons-nous dans un triangle quelconque que l'on nomme ABC.
Par le point A, on trace (xy), la parallèle à (BC).

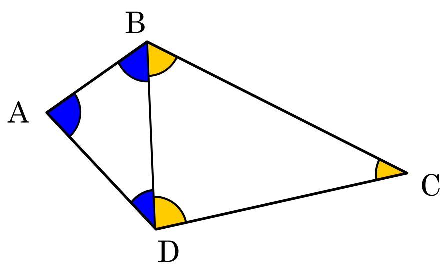


Les angles $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ABC}$, d'une part, $\widehat{yAC}$ et $\widehat{ACB}$ d'autre part, sont des angles alternes - internes par rapport aux droites parallèles (*xy*) et (BC), coupées par les sécantes (AB) et (AC). Ces angles sont donc deux à deux égaux.
Pour calculer la somme des angles du triangle ABC, on peut donc remplacer $\widehat{ABC}$ par $\widehat{xAB}$ et $\widehat{ACB}$ par $\widehat{yAC}$. La somme est donc égale à : $\widehat{xAB} + \widehat{BAC} + \widehat{yAC}$ soit $\widehat{xAy}$.
Or cet angle est un angle plat, donc la somme est égale à 180°.

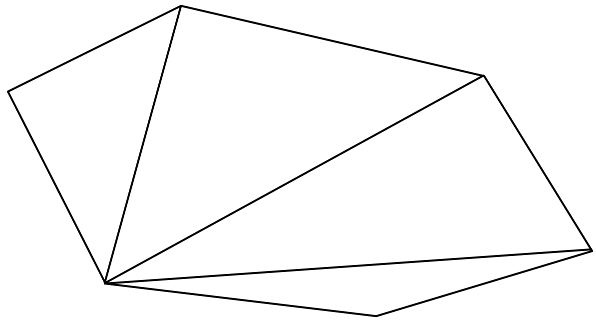
b) Somme des angles dans un polygone :

Propriété :
La somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2) \times 180°$.

Démonstration :
Dans un quadrilatère ABCD, la somme des angles est :
$S = \widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBA}$
Or $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} + \widehat{BDC}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{CBD} + \widehat{DBA}$
Donc $S = \left(\widehat{BAD} + \widehat{ADB} + \widehat{BDC}\right) + \left(\widehat{DCB} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA}\right)$
$\left(\widehat{BAD} + \widehat{ADB} + \widehat{BDC}\right) = \left(\widehat{DCB} + \widehat{CBD} + \widehat{DBA}\right) = 180°$
Donc $S = 2 \times 180° = 360°$



De la même manière, dans un polygone à n côtés, un sommet est relié par une diagonale à (n – 2) autres sommets. (tous les sommets qui ne lui sont pas consécutifs). Ainsi, ces diagonales font apparaître (n – 2) triangles. La somme des angles du polygone est donc égale à la somme des angles de (n – 2) triangles.
C'est à dire que cette somme est égale à (n – 2) × 180°.



2) Polygones inscrits dans un cercle

a) Définitions :

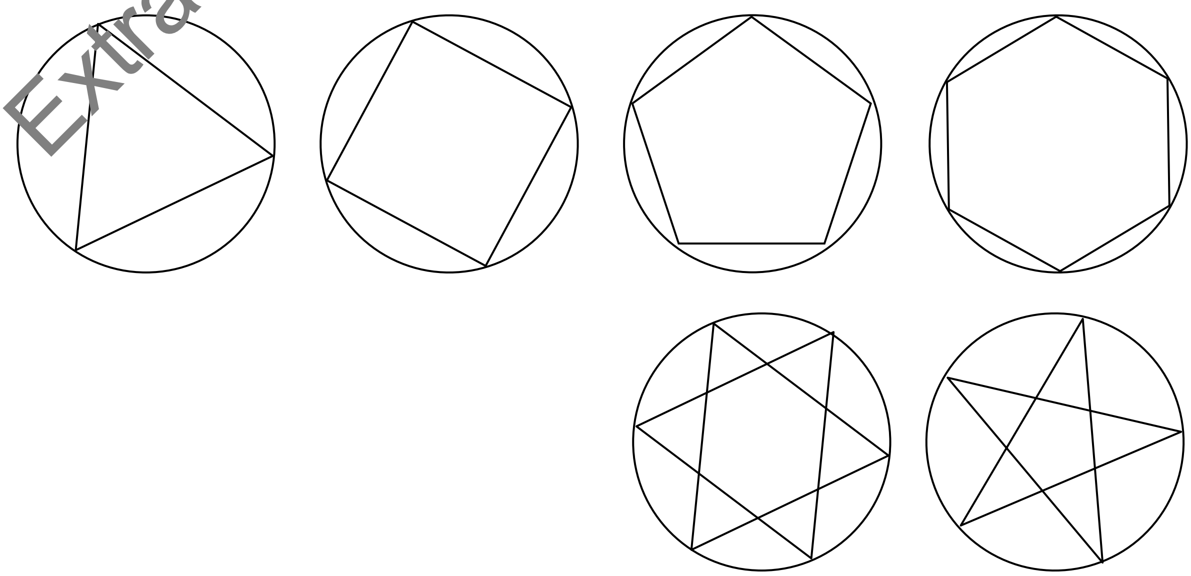
Un polygone est dit **inscrit** dans un cercle $(\mathscr{C})$ si tous ses sommets sont des points du cercle $(\mathscr{C})$.

On dit alors que le cercle $(\mathscr{C})$ est **circonscrit** au polygone.

b) Polygones réguliers :

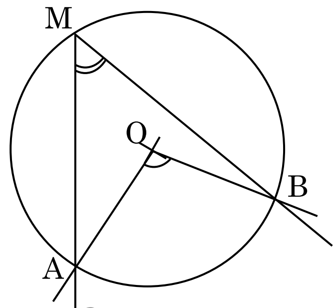
Un polygone régulier a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux ; ses sommets sont régulièrement répartis sur un cercle (leur nombre n > 2 est l'ordre du polygone).
Le nombre des polygones réguliers est infini. Tous ces polygones ne sont pas constructibles à la règle et au compas.
Ils peuvent être convexes (leurs diagonales sont à l'intérieur) ou étoilés (leurs côtés sont n diagonales des convexes).

Exemples :



3) Angles inscrits et angles au centre

a) Vocabulaire :



O est le centre du cercle $(\mathscr{C})$; A, M et B sont trois points de $(\mathscr{C})$

$\widehat{AMB}$ est un angle **inscrit**.
$\widehat{AOB}$ est un angle **au centre** .
$\overset{\frown}{AB}$ est l'arc **intercepté** par ces deux angles.

b) Observation, conjecture :

Tracer (à l'encre) un cercle de centre O et de rayon 5 cm.
Placer (au crayon) deux points A et B sur $(\mathscr{C})$ tels que $\widehat{AOB} = 80°$.

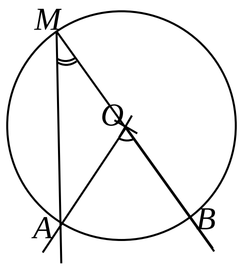
Placer deux points M et P diamétralement opposés sur $(\mathscr{C})$. Mesurer (avec le rapporteur) les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$.
Gommer les points A et B, et recommencer les mesures pour d'autres positions de A et B.
Par répétition de ces observations, il apparaît que :

- Lorsque M est hors de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté par $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$,
- Lorsque P est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ intercepté par $\widehat{AOB}$, $\widehat{APB} = 180° - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$

De plus, $\widehat{AMB} + \widehat{APB} = 180°$

c) Démonstration :

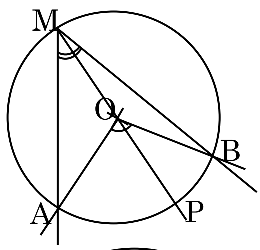
Montrons que $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$.



1er cas : M, O et B sont alignés

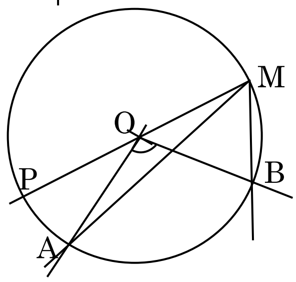
[MB] est un diamètre de $(\mathscr{C})$ et A est un point de $(\mathscr{C})$.

MOA est isocèle en O, donc $\widehat{MOA} = 180° - 2 \times \widehat{AMO}$.
$\widehat{AOB} = 180° - \widehat{MOA} = 180° - (180° - 2 \times \widehat{AMO}) = 2 \times \widehat{AMO}$



2ème cas : lorsque (MO) coupe $\overset{\frown}{AB}$

Plaçons P, point d'intersection de (MO) et de $\overset{\frown}{AB}$
D'après le premier cas, $\widehat{AOP} = 2 \times \widehat{AMP}$ et $\widehat{POB} = 2 \times \widehat{PMB}$
Et, par addition, $\widehat{AOB} = \widehat{AOP} + \widehat{POB} = 2 \times \widehat{AMP} + 2 \times \widehat{PMB}$
Donc : $\widehat{AOB} = 2 \times (\widehat{AMP} + \widehat{PMB}) = 2 \times \widehat{AMB}$

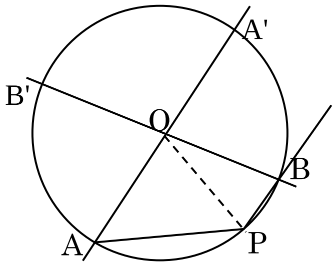


3ème cas : lorsque (MO) ne coupe pas $\overset{\frown}{AB}$

Plaçons P, point d'intersection de (MO) et de $(\mathscr{C})$

D'après le premier cas, $\widehat{POB} = 2 \times \widehat{PMB}$ et $\widehat{POA} = 2 \times \widehat{PMA}$
Par différence, $\widehat{AOB} = \widehat{POB} - \widehat{POA} = 2 \times \widehat{PMB} - 2 \times \widehat{PMA}$
Donc : $\widehat{AOB} = 2 \times (\widehat{PMB} - \widehat{PMA}) = 2 \times \widehat{AMB}$

Montrons que lorsque P est un point de $\overset{\frown}{AB}$, $\widehat{APB} = 180° - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$



Plaçons les points A' et B' diamétralement opposés respectivement à A et B sur $(\mathscr{C})$

En application du premier cas ci-dessus,

$\widehat{B'OP} = 2 \times \widehat{B'BP}$ et $\widehat{A'OP} = 2 \times \widehat{A'AP}$.

$\widehat{AOB} = \widehat{B'OA'} = 360° - (\widehat{B'OP} + \widehat{A'OP})$

$\widehat{AOB} = 360° - (2 \times \widehat{B'BP} + 2 \times \widehat{A'AP}) = 360° - 2 \times (\widehat{B'BP} + \widehat{A'AP})$

Mais dans le quadrilatère OBPA, $\widehat{B'BP} + \widehat{A'AP} = 360° - (\widehat{AOB} + \widehat{APB})$

On obtient donc : $\widehat{AOB} = 360° - 2 \times (360° - (\widehat{AOB} + \widehat{APB})) = 2 \times \widehat{AOB} + 2 \times \widehat{APB} - 360°$.

L'égalité : $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AOB} + 2 \times \widehat{APB} - 360°$ devient : $\widehat{AOB} + 2 \times \widehat{APB} = 360°$

et enfin : $\boldsymbol{\widehat{APB} = 180° - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}}$

d) <u>Propriété :</u>

Si A, B, M et P sont quatre points du cercle $(\mathscr{C})$ tels que M est hors de $\overset{\frown}{AB}$ et P est un point de $\overset{\frown}{AB}$, alors :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} \text{ ou } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$$

$$\widehat{AOB} = 360° - 2 \times \widehat{APB} \text{ ou } \widehat{APB} = 180° - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$$

EXERCICES TYPES

Exercice 1 : Montrer qu'un triangle est rectangle

Méthode

- On repère le triangle qui semble rectangle dans la figure.
- On cherche le plus grand côté et on calcule le carré de sa longueur.
- On calcule la somme des carrés des deux autres côtés.
- On compare les deux résultats obtenus et on conclut.

Énoncé :

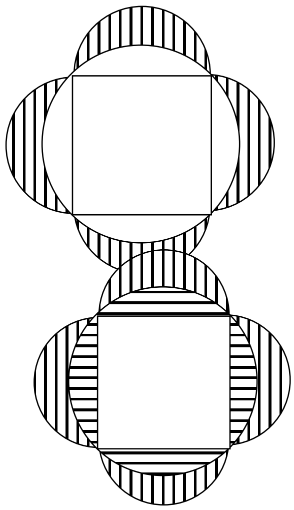
Le triangle LIT tel que : LI = 72, IT = 54 et LT = 90 est-il rectangle?
Si oui, quels sont les deux côtés perpendiculaires?

Solution :

LT est le plus grand côté. $LT^2 = 90^2 = 8100$
$LI^2 + IT^2 = 72^2 + 54^2 = 5184 + 2916 = 8100$
Donc $LT^2 = LI^2 + IT^2$; et d'après la réciproque de l'énoncé de Pythagore, le triangle LIT est rectangle en I. Les côtés [LI] et [IT] sont perpendiculaires.

Exercice 2 : Théorème de Pythagore

1) Quelle est l'aire de la partie hachurée si le côté du carré mesure 10 cm?
2) Exprimer cette aire en fonction de a, dans le cas général où la longueur du côté du carré est a.



Solution :

Pour un côté qui mesure 10 cm.

La partie hachurée horizontalement H s'obtient en enlevant l'aire du carré à l'aire du disque.
On connait le côté du carré (10 cm) mais pas le rayon du disque, que l'on va calculer par l'énoncé de Pythagore dans le carré.
En traçant la diagonale D du carré (qui est le diamètre du disque), on obtient deux triangles rectangles isocèles de côté 10 cm.
On a donc $D = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200}$. On peut donc maintenant calculer H :

$$H = \pi \times \frac{D^2}{4} - 10^2 = \frac{200 \times \pi}{4} - 100 = 50\,\pi - 100$$

La partie hachurée verticalement V s'obtient en enlevant H à l'aire de quatre demi disques de rayon 5 cm, et qui forment donc deux disques de rayon 5 cm.
D'où : $V = 2 \times \pi \times 5^2 - H = 50\pi - (50\pi - 100) = 100\ \text{cm}^2$.

Pour un côté quelconque a :

$D = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$; $H = \pi \times \frac{D^2}{4} - a^2 = \frac{2a^2\pi}{4} - a^2 = \frac{\pi}{2}a^2 - a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$

$V = 2\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 - H = \frac{\pi}{2}a^2 - \left(\frac{\pi}{2}a^2 - a^2\right) = a^2$

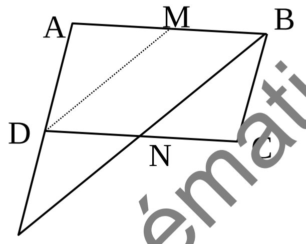
Donc, dans tous les cas, l'aire de la partie hachurée est égale à l'aire du carré.

Exercice 3 : Parallélogrammes

ABCD est un parallélogramme. M est le milieu de [AB].
La parallèle à (MD) passant par B coupe (CD) en N.
Démontrer que les droites (AC), (MN) et (BD) sont concourantes.

Solution :

Données :



- ABCD est un parallélogramme
- M milieu de [AB]
- (BN) // (MD)

Montrons que (AC) , (MN) et (BD) sont concourantes.

Hypothèses : ABCD est un parallélogramme.
Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles.
Conclusion : (AB) // (DC) et par conséquent : (MB) // (DN).

Hypothèses : (MB) // (DN), et (BN) // (MD).
Propriété : Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
Conclusion : MBND est un parallélogramme.

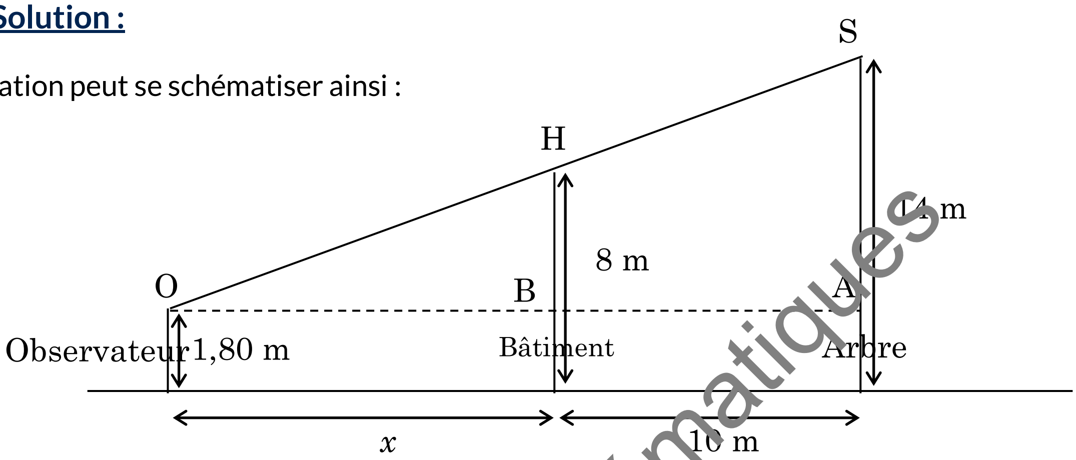
Hypothèses : ABCD et MBND sont des parallélogrammes.
Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.
Conclusion : [AC] et [BD] d'une part et [MN] et [BD] d'autre part, ont le même milieu. C'est à dire que ce milieu est commun aux trois diagonales. Les trois droites passent donc par ce point et sont concourantes.

Exercice 4 : Théorème de Thalès

Un observateur qui mesure 1,80 mètres tente d'apercevoir un arbre haut de 14 mètres, qui est caché par un bâtiment qui est haut de 8 mètres. A quelle distance du bâtiment doit-il se placer pour pouvoir en apercevoir le faîte, sachant qu'il y a une distance de 10 mètres qui sépare l'arbre du bâtiment?

Solution :

La situation peut se schématiser ainsi :



Une des résolutions possibles consiste à tracer une droite horizontale au niveau des yeux de l'observateur, qui coupe le bâtiment en B, et l'arbre en A.
On suppose bien sûr que le bâtiment et l'arbre sont perpendiculaires au sol.
On appelle x la distance recherchée.

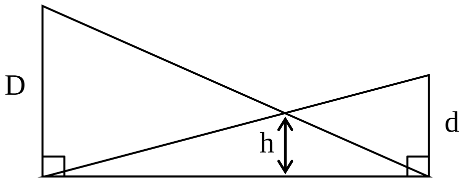
En appliquant la relation de Thalès, on obtient : $\frac{OB}{OA} = \frac{BH}{SA}$,

qui donne : $\frac{x}{x+10} = \frac{6{,}2}{12{,}2}$

En appliquant la règle des produits en croix : $12{,}2\,x = 6{,}2\,(x + 10)$

D'où : $12{,}2\,x = 6{,}2\,x + 62$, puis $6x = 62$, et enfin : $x = \frac{62}{6} = \frac{31}{3} \approx 10{,}3$ m.

Exercice 5 : Théorème de Thalès

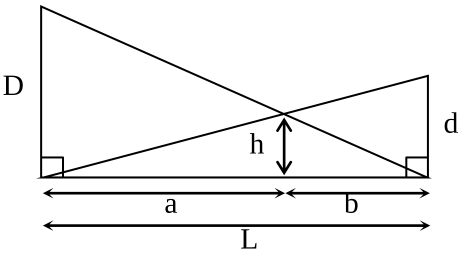


1. **Montrer que la longueur h ne dépend que des deux longueurs d et D. Exprimer h en fonction de d et D.**
2. **Application numérique :**

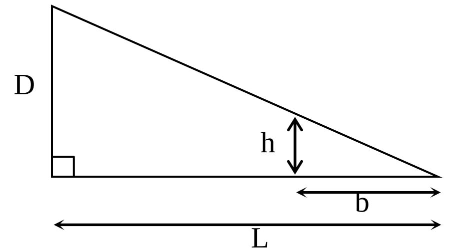
Calculer h lorsque D = 20 m et d = 10 m
Calculer h lorsque D = 24 m et d = 16 m

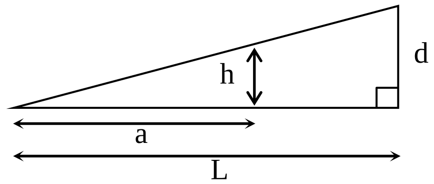
Solution :

Pour une rédaction correcte, il faut nommer des longueurs que l'on va utiliser :



En appliquant deux fois la propriété de Thalès, on obtient les égalités :





$\frac{h}{D} = \frac{b}{L}$ $\qquad\qquad$ $\frac{h}{d} = \frac{a}{L}$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $\frac{h}{D} + \frac{h}{d} = \frac{b}{L} + \frac{a}{L}$.

Or, $\frac{b}{L} + \frac{a}{L} = \frac{b+a}{L} = \frac{L}{L} = 1$. De plus, $\frac{h}{D} + \frac{h}{d} = \frac{hd + hD}{dD} = \frac{h(d+D)}{dD}$

Donc $\frac{h(d+D)}{dD} = 1$; d'où : $h(d + D) = dD$, et enfin : $\mathbf{h = \frac{dD}{d + D}}$

h ne dépend donc que de d et D.

Applications numériques :

Lorsque D = 20 m et d = 10 m, $h = \frac{10 \times 20}{10 + 20} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

Lorsque D = 24 m et d = 16 m, $h = \frac{16 \times 24}{16 + 24} = \frac{384}{40} = \frac{48}{5} = 9{,}6$

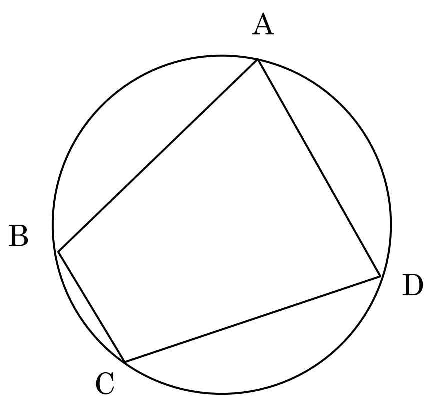
Exercice 6 : Cercles et angles

A, B , C et D sont quatre points placés dans cet ordre sur un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O, de manière que $\widehat{BCD} = 110°$ et $\widehat{CDA} = 80°$.

Calculer $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ABC}$

Prouver que, d'une manière générale, les angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle sont supplémentaires.

Solution :



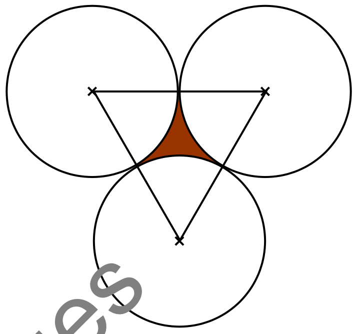
$\widehat{DCB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{DB}$, comme l'angle au centre $\widehat{DOB}$,
donc $\widehat{DOB} = 2\widehat{DCB}$.
A étant un point de l'arc $\overset{\frown}{DB}$, $\widehat{DAB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{DOB}$
donc $\widehat{DAB} = 180° - \frac{1}{2} \times 2\,\widehat{DCB} = 180° - \widehat{DCB} = 180° - 110° = \mathbf{70}°$
$\widehat{ABC} = 360° - (\widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB}) = 360° - (110° + 80° + 70°) = \mathbf{100°}$

Dans le cas général :

$\widehat{ABC} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOC} = 2\widehat{ADC}$, donc $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADC}$
Deux angles opposés sont supplémentaires, donc les deux autres le sont aussi.

EXERCICES NON A SOUMETTRE

Exercice 1



Trois cercles de même rayon R sont tangents deux à deux.
Exprimer l'aire de la zone centrale colorée en fonction de R dans le cas général.
Déterminer un valeur approchée au mm² de l'aire de la zone centrale colorée lorsque R = 10 cm.

Exercice 2

Trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre. $(\mathcal{C}_1)$ est le cercle de diamètre [AC] et $(\mathcal{C}_2)$ est le cercle de diamètre [BC]. Une droite passant par C, recoupe $(\mathcal{C}_1)$ en M et $(\mathcal{C}_2)$ en N.

Démontrer que (AM)//(BN).

Exercice 3

ABCD est un rectangle. M est un point de [AB] et N est un point de [DC] tels que AM = CN. K est un point de [AD] et L est un point de [BC] tels que BL = DK.
Déterminer la nature de MLNK.

Exercice 4

Dans le triangle PQR, N est le milieu de [PQ], T est le milieu de [PR] et S est le milieu de [QR]. (PH) est la hauteur du triangle PQR issue de P.
Montrer que TS = HN.

Exercice 5

ABCD est un quadrilatère non croisé.
M est le milieu de [AB], N est le milieu de [CD], R est le milieu de [AC], P est le milieu de [BD], Q est le milieu de [MN].
Démontrer que P, Q et R sont alignés.

Exercice 6

ABC est un triangle. M et N sont deux points de [AB] tels que AN = NM = MB. L est le milieu de [AC]. [BL] coupe [MC] en K. **Déterminer la position de K sur [BL] et sur [MC]** .

Exercice 7

MNGH est un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O.
Les droites (MN) et (HG) se coupent en R.
Montrer que les triangles MHR et NGR ont des angles de même mesure.

Exercice 8

Soit MNP un triangle; on nomme m la longueur du côté [NP], n la longueur du côté [MP] et p la longueur du côté [MN].
À l'extérieur de MNP, on construit trois triangles :
MRN tel que la hauteur relative à [MN] mesure p.
MPS tel que la hauteur relative à [MP] mesure n.
NPT tel que la hauteur relative à [PN] mesure m.
Démontrer que pour que l'aire du triangle NPT soit égale à la somme des aires des triangles MRN et NPT, il est nécessaire et suffisant que MNP soit rectangle en M.

Exercice 9

PRF est un triangle rectangle en R. La longueur de l'hypoténuse est le double de celle du côté [RP]. H est le point de (PF), hors de [PF] tel que HPR est isocèle en P. K est tel que RKF est équilatéral et que P et K ne soient pas du même côté de (RF). **Démontrer que H, R et K sont alignés.**

Exercice 10

A, B et C sont trois points alignés dans cet ordre. $(\mathscr{C}_1)$ est le cercle de diamètre $[AB]$; $(\mathscr{C}_2)$ est le cercle de diamètre [BC]. Une droite passant par B recoupe $(\mathscr{C}_1)$ en E et $(\mathscr{C}_2)$ en F. X est un point quelconque de $(\mathscr{C}_1)$ et Y est un point quelconque de $(\mathscr{C}_2)$

Montrer que $\widehat{AXE} = \widehat{FYC}$.

Exercice 11

ABC est un triangle rectangle en A. D est un point de [AC] .
Démontrer que :
pour que BDC soit isocèle en D, il est nécessaire et suffisant que $\widehat{ADB} = 2 \times \widehat{BCD}$.

Exercice 12

Deux cordes [AM] et [BN] d'un même cercle se coupent en K. **Quelle est la mesure de $\widehat{AKB}$ si $\widehat{NAM} = x$ et $\widehat{AMB} = y$?**

Exercice 13

$(\mathscr{C})$ est un cercle de diamètre [AB]. O est un point de $(\mathscr{C})$. Le cercle $(\mathscr{C}')$, de centre O passant par A recoupe $(\mathscr{C})$ en M. (BM) recoupe $(\mathscr{C}')$ en K.

Démontrer que O est le milieu de [AK]

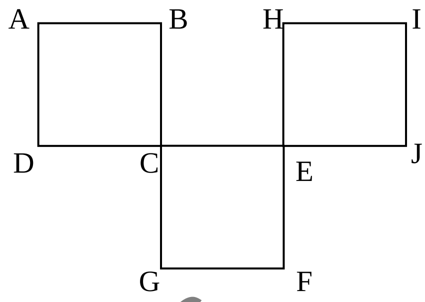
Exercice 14

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles ainsi que (d) et (d').
(D_1) et (d) se coupent en A. (D_2) et (d') se coupent en B.
Une droite (Δ) passant par B coupe (D_1) en N et (d) en M.
C est un point quelconque de (AB).

X est le point d'intersection de (MC) et (d') ; Y est le point d'intersection de (NC) et (D_2).
Démontrer que (XY) est parallèle à (MN).

Exercice 15

ABCD, DEFG et EHIJ sont trois carrés de même dimension.
Appelons a la longueur des côtés de ces carrés.
Montrer qu'il existe un cercle passant par 6 des 10 sommets de ces trois carrés.
Préciser la position de son centre et son rayon.



Exercice 16

ABCD est un carré. E est le point d'intersection de la diagonale [AC] et du quart de cercle intérieur au carré, de centre A, de rayon AB.

F est le point de [AC] , centre du cercle $(\mathscr{C})$ tangent à [BC] en H, tangent à [DC] en K, et passant par E.

Exprimer le rayon r de $(\mathscr{C})$ en fonction du côté a du carré ABCD.

Exercice 17

ABC est un triangle rectangle en C.
D est le symétrique de C par rapport à (AB).
H est le point d'intersection de (AB) et (DC).
$\mathcal{A}$ est l'aire du disque de diamètre [DH].
$\mathcal{B}$ est l'aire de la surface limitée par :

- le demi-cercle de diamètre [AB] passant par C.
- le demi-cercle de diamètre [AH] situé du même côté de (AB) que C.
- le demi-cercle de diamètre [BH] situé du même côté de (AB) que C.

Comparer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Exercice 18

[AB] et [CD] sont deux diamètres perpendiculaires du même cercle $(\mathscr{C})$, de centre O. La médiatrice de [OB] coupe $(\mathscr{C})$ en E (sur CB) et en F (sur BD).

Comparer la longueur de l'arc CD (demi-cercle) et la somme des longueurs CA + AF.

Exercice 19

Une droite (D) coupe respectivement en P, Q et R,, les droites (BC), (CA) et (AB) qui sont les supports des côtés d'un triangle ABC.
La parallèle à (D) passant par A coupe (BC) en S.

Démontrer que : $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{PC}{PS}$**, et que** $\dfrac{RA}{RB} = \dfrac{PS}{PB}$

Démontrer que : $\dfrac{PB}{PC} \times \dfrac{QC}{QA} \times \dfrac{RA}{RB} = 1$

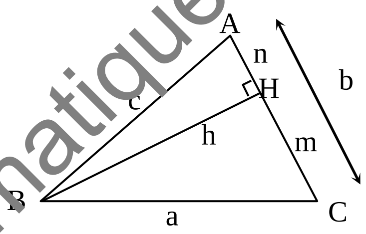
Exercice 20

ACDF est un rectangle et BCDE est un carré.
M est un point de [AF] et K est le point de [CD] tel que [MK] ⊥ [CD].
[MC] coupe [BE] en I. [MD] coupe [BE] en J.
Démontrer que la longueur IJ ne dépend pas de la position de M sur [AF].

Des relations dans le triangle rectangle :

Exercice 21 :

Ces exercices utilisent entre autres le théorème de Pythagore, les produits remarquables, et la trigonométrie dans un triangle rectangle
ABC est un triangle quelconque du plan.



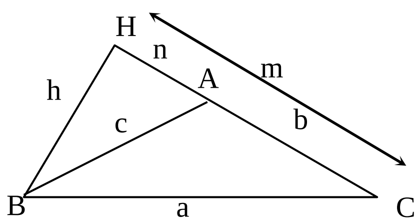
I). Dans cette partie, on suppose que l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC est aigu.
On se propose de démontrer l'égalité :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{A}$. (1)
Tout triangle possède au moins deux angles aigus. Supposons par exemple que l'angle $\widehat{C}$ soit aussi aigu.
Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
Comme les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC sont aigus, H est un point du segment [AC].
On pose AB = c ; AC = b ; BC = a ; BH = h; CH = m; AH = n.

1. Justifier les égalités suivantes

$a^2 = m^2 + h^2$
$a^2 = b^2 - 2bn + n^2 + h^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$

2. Conclure.

II. Dans cette partie, on suppose que l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC est obtus.
On se propose de démontrer l'égalité :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \times AB \times AC \times \cos(180° - \widehat{A})$ (2)
L'angle $\widehat{A}$ est obtus donc les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ du triangle ABC sont aigus.
Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
Comme les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{A}$ du triangle ABC sont respectivement aigu et obtus, A est un point du segment [CH].
On pose AB = c ; AC = b ; BC = a ; BH = h ; CH = m ; AH = n.
En utilisant la même démarche que dans la première partie démontrer l'égalité (2).

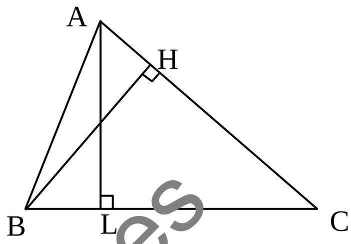


Exercice 22

I. Dans cette partie ABC est un triangle qui a trois angles aigus.

On se propose de démontrer les égalités : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{BC} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{AB}$ (1)

Soit L et H les pieds des hauteurs issues respectivement de A et de B dans le triangle ABC.



1. a. Justifier les égalités AL = AB sin $\widehat{B}$ et AL = AC sin $\widehat{C}$.

b. En déduire l'égalité $\dfrac{\sin\widehat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{AB}$

2. a. Justifier les égalités BH = BC sin $\widehat{C}$ et BH = BA sin $\widehat{A}$.

b. En déduire l'égalité $\dfrac{\sin\widehat{A}}{BC} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{AB}$

3. Conclure.

II. Dans cette partie ABC est un triangle obtus angle du plan, dont l'angle obtus est par exemple l'angle $\widehat{A}$.

Soit L et H les pieds des hauteurs issues respectivement de A et de B dans le triangle ABC. En utilisant la même démarche que dans la première partie démontrer les égalités

$\dfrac{\sin(180° - \widehat{A})}{BC} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{AC} = \dfrac{\sin\widehat{C}}{AB}$